机械振动单自由度

2023年2月1日 15:05

Author: lookas
Source: https://18kas.com/mechanical-vibrations

课1 序言

振动系统

振动：围绕某一固定位置来回往复运动，并随时间变化的运动

振动系统：可以产生机械振动的力学系统，称为振动系统。一般来说，任何具有弹性和惯性的力学系统均可以产生机械振动。

因此，振动系统通常包括：储存势能的元件(弹簧)，储存动能的元件（质量），耗能元件（阻尼器）

◆不论是简单的或复杂的机械系统，其简化后的当量系统中物理量主要有四个：质量（转动惯量）、刚度、作用力（力矩）、阻力。

（等效质量/转动惯量、等效刚度、等效力/力矩）

根据功能守恒原理：（1）质量和刚度在振动过程中分别产生动能和积蓄势能，必须使转化前后动能势能保持不变：

$T_{当动}=T_{实、动}$　　$W_{当势}=W_{实、势}$

（2）作用力及阻力在振动过程中的正功与负功需保持不变：

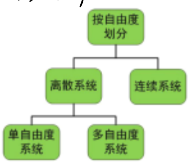
$A_{当、力}=A_{实、力}$　　$A_{当、阻力}=A_{实、阻力}$

振动系统构成

- 把外界对振动系统的激励或作用，称为振动系统的激励或输入
- 系统对外界影响的反映，称为振动系统的响应或输出
- 二者由系统(质量、弹簧、阻尼)的振动特性相联系

振动系统分类

按自由度分



自由度：机构具有确定运动时所必须给定的独立运动参数的数目

离散系统：可用有限数量自由度描述的系统，也称集中参数系统

连续系统：具有无限多个自由度的系统，也称分布参数系统

按激励、阻尼划分

自由振动：系统受到一个初始扰动后任其自身振动

受迫振动：系统在外力(通常是重复性外力)作用下的振动

无阻尼振动振动：系统能量无损耗，没有阻尼器件

已确定

有阻尼振动振动：系统能量有损耗

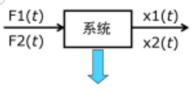
已经知

按力是否线性划分

线性振动：一个系统的全部元件都遵循线性规律，则这个系统的振动为线性振动

（非线性不好考）

线性振动的一个重要特性是线性叠加原理成立



$a_1F_1(t)+a_2F_2(t) \longrightarrow a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$

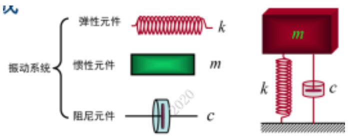
课2 单自由度振动系统

◆只有一个自由度的振动系统，称为单自由度振动系统，简称单自由度系统。

◆自由度：指完整描述一个振动系统时间特性所需的最少的独立坐标数，[redacted]

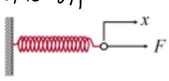
单自由度振动系统的组成

振动系统构成：弹性元件、惯性元件质量、阻尼



◆弹性元件(弹簧)是提供振动的回复力，惯性元件(质量)是承载运动的实体，阻尼在振动过程中消耗系统的能量和吸收外界的能量。

→弹性元件

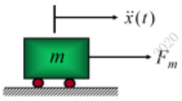


$F=kx$

k—弹簧的刚度系数，单位：N/m

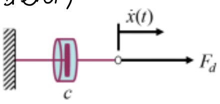
- 弹簧无质量
- …… 不超过线性范围

→惯性元件



$F_m = m\ddot{x}(t)$

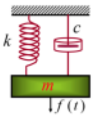
→阻尼元件



$F_d = c\dot{x}$

c=阻尼系数，单位 N·s/m

单自由度系统的类型：



◆ $f(t)=0$，$c=0$:
单自由度无阻尼自由振动系统

◆ $f(t)=0$，$c \neq 0$:
单自由度有阻尼自由振动系统

◆ $f(t)\neq 0$，$c = 0$:
单自由度无阻尼受迫振动系统

◆ $f(t)\neq 0$，$c \neq 0$:
单自由度有阻尼受迫振动系统

$f(t)=0$ 自由振动　$c=0$ 无阻尼
$f(t)\neq 0$ 受迫振动　$c\neq 0$ 有阻尼

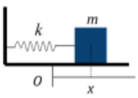
单自由度系统的自由振动 $f(t)=0$　$c=0$

◆ 弹簧振子模型

弹簧振子：弹簧 — 物体系统 { 物体—可看作质点；轻弹簧—质量忽略不计 }

$ms^2x+kx=0$

$x=\dfrac{-k}{ms^2}$



1. 受力特点　$F=-kx$
2. 动力学方程　$F=-kx=ma=m\ddot{x}$

⇒ $m\ddot{x}+kx=0$ 微分方程

令 $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　$\ddot{x}+\omega_n^2x=0$

单位：rad/s　　其中 ω_n 为 固有频率

/16/2021

其通解为：

$$x=A\sin(\omega_n t+\varphi)$$ 振动方程

简谐振动：

一个做往复运动的物体，如果其偏离平衡位置的位移x随时间t 按余弦（或正弦）规律变化的振动

x 可作广义理解：
位移、角度、电流、场强、温度…

说明：

1、物体发生振动的条件：物体受到始终指向平衡位置的回复力；物体具有惯性。

2、平衡位置是指合外力为零的位置。

3、判断物体是否作简谐振动的依据：
（1）物体所受的合外力与位移正比但反向；
（2）满足位移与时间有余弦（或正弦）关系。

4、简谐振动位移、速度、加速度都随时间t做周期性变化。

振动方程：$x=A\sin(\omega_n t+\varphi)$

速度方程：$\upsilon=\dfrac{dx}{dt}=\omega_n A\cos(\omega_n t+\varphi)=\dot{x}$　　均做简谐振动

加速度方程：$a=\dfrac{d\upsilon}{dt}=-A\omega_n^2\sin(\omega_n t+\varphi)=\ddot{x}$

5、任何振动都可看成若干不同频率的简谐振动的合成。

简谐振动参数

1、周期、频率、圆频率

（1）周期T：完成一次完全振动所需的时间，s

$x=A\sin(\omega_n t+\varphi)=A\sin(\omega_n(t+T)+\varphi)$
$=A\sin(\omega_n t+\varphi+2\pi)$

$\therefore \omega_n T=2\pi$　或　$T=2\pi/\omega_n=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

（2）频率f_n：单位时间内所完成的完全振动的次数，Hz

$$f_n=\frac{1}{T}=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

（3）固有圆频率，仅有力学系统性质决定　rad/s　$\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

6/2021　仅与系统物理性质有关　18

2、振幅A

质量块离开静平衡位置的最大位移的绝对值，m

$$\because \begin{cases} x = A\sin(\omega t+\varphi) \\ \dot{x} = \omega_n A\cos(\omega_n t+\varphi) \end{cases}$$ 进导

令t=0则 $$\begin{cases} x_0 = A\sin\varphi & (1) \\ \dfrac{\dot{x}_0}{\omega} = A\cos\varphi & (2) \end{cases}$$

$\sqrt{(1)^2+(2)^2}$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}}$$

3、初相位 φ

质量块的初始位置， 角度 $\varphi = \arctan\dfrac{x_0\omega_n}{\dot{x}_0}$ $\dfrac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}$ $\tan\theta = \frac{a}{b}$

与系统物理性质、初始条件有关

简谐振动的能量

无阻尼系统为保守系统，其机械能守恒，

其 $T+V=const$ or $\frac{d}{dt}(T+V)=0$ T动能 V势能

◆ 弹簧振子模型

振动方程： $x = A\sin(\omega_n t+\varphi)$

速度方程： $v=\dfrac{dx}{dt}=\omega_n A\cos(\omega_n t+\varphi)$ 均做简谐振动

加速度方程： $a=\dfrac{dv}{dt}=-A\omega_n^2\sin(\omega_n t+\varphi)$

动能： $E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(m\omega_n^2)A^2\cos^2(\omega_n t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_n t+\varphi)$

势能： $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_n t+\varphi)$

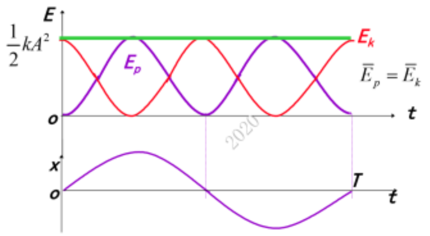
总能量： $\boxed{E=E_k+E_p==\frac{1}{2}kA^2}$

$$\bar{E}_k=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_n t+\varphi)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2(\frac{1}{2}(1+\underbrace{\cos 2(\omega_n t+\varphi)}_{\text{积分为0}}))dt=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\bar{E}_p=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_n t+\varphi)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2(\frac{1}{2}(1-\cos 2(\omega_n t+\varphi)))dt=\frac{1}{4}kA^2$$

谐振动在一周期内的平均动能和平均势能相等。

$$\bar{E}_p=\bar{E}_k=\frac{1}{2}E$$



由起始能量求振幅 $E=\frac{1}{2}kA^2$ ➡ $A=\sqrt{\frac{2E}{k}}=\sqrt{\frac{2E_0}{k}}$

动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$ $=\frac{1}{2}kA^2\cancel{\sin}^2(\omega t+\varphi_0)$ cos	$E_{k\max}=\frac{1}{2}kA^2$ $E_{k\min}=0$ $\bar{E}_k=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}E_k dt=\frac{1}{4}kA^2$
势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ $=\frac{1}{2}kA^2\cancel{\cos}^2(\omega t+\varphi_0)$ sin	$E_{p\max}$, $E_{p\min}$, $\bar{E}_p$ 情况同动能
机械能 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$	简谐振动系统机械能守恒

课堂练习： P59

一弹簧振子作简谐振动，总能量为E_1，如果谐振动的振幅增加为原来的两倍，重物的质量增加为原来的4倍，则其总能量将变为

$E=\frac{1}{2}kA^2$ 应该 $A\times2$ ∴ $E\times4$

P60

光滑水平面上的弹簧振子由质量为M的木块和劲度系数为k的轻弹簧构成. 现有一个质量为m，速度为 u_0 的子弹射入静止的木块后陷入其中，此时弹簧处于自由状态. (1) 试写出该谐振子的振动方程；(2) 求出 $x=\dfrac{A}{2}$ 处系统的动能和势能.

k M

$\frac{m}{k}$

(1) $E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mu_0^2$ $A=\sqrt{\frac{m}{k}}u_0$ $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{m}{k}$

1) $E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mu_0^2$ $A=\sqrt{\frac{m}{k}}u_0$ $w_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$x=A\sin(w_nt+\varphi_0)=\sqrt{\frac{m}{k}}u_0(\sqrt{\frac{k}{M}}t)$

2) $E_k=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(w_nt+\varphi_0)=\frac{1}{2}mu_0^2\cos^2(\sqrt{\frac{k}{M}}t)$

$E_p=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(w_nt+\varphi_0)=\frac{1}{2}mu_0^2\sin^2(\sqrt{\frac{k}{M}}t$

1) 射入时 动量守恒

$mu_0=(m+M)V_0$ $\therefore V_0=\frac{m}{(m+M)}u_0$

射入木块后，两者一起运动 $m+M$

$w=\sqrt{\frac{k}{m+M}}$ 取弹簧处于自由状态时，木块的平衡位置为坐标原点，水平向右为x轴正方向，并取木块和子弹一起开始向右运动的时刻为计时起点. [redacted]条

初始条件 $x_0=0$ $v_0=V_0>0$

振动方程 $x=A\sin(wt+\varphi_0)$

代入得 $\begin{cases} 0=A\sin\varphi_0 \text{ 振动方程} \\ V_0=Aw\cos\varphi_0>0 \text{ 振动方程} \end{cases}$ $\varphi_0=2\pi$ $A=\frac{V_0}{w\cos\varphi_0}=\frac{mu_0}{\sqrt{k(m+M)}}$

$\therefore$ 振动方程 $x=A\sin(wt+\varphi_0)=\frac{mu_0}{\sqrt{k(m+M)}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t+2\pi)$

(2) $x=$ 当时该振动系统势能和动能分别为

$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(\frac{A}{2})^2=\frac{1}{8}kA^2=\frac{1}{8}k\frac{m^2u_0^2}{k(m+M)}$

$E_k=E-E_p=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{8}kA^2=\frac{3}{8}kA^2=\frac{3m^2u_0^2}{8(m+M)}$

P63

如图1-5所示，在一根垂直轴下端固定着一个圆盘。圆盘转动惯量为J，轴的扭转刚度为k_θ，轴的长度为l，直径d。

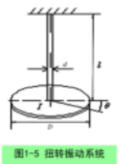


图1-5 扭转振动系统

直角线振动	扭转振动
位移 x	角度 θ
质量 M	转动惯量 J

当系统受到某种干扰后即作扭转自由振动，现取θ为广义坐标，并以逆时针为正。振动时圆盘上受到一个由圆轴作用的，且与θ方向相反的弹性恢复力矩$-k_\theta\theta$。

扭转振动运动方程

$J\ddot{\theta}=-k_\theta\theta \longrightarrow J\ddot{\theta}+k_\theta\theta=0$

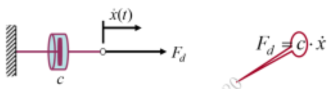
令 $w_n^2=\frac{k_\theta}{J} \longrightarrow \ddot{\theta}+w_n^2\theta=0$

$\therefore$ 通解 $\theta=A\sin(w_nt+\varphi_0)$ $w_n=\sqrt{\frac{k_\theta}{J}}$ $f=\frac{w_n}{2\pi}$ $T=\frac{1}{f}$

$\theta_0=A\sin(\varphi_0)$ $\therefore A=\sqrt{\theta_0^2+(\frac{\dot{\theta}_0}{w_n})^2}$

$\dot{\theta}_0=Aw_n\cos(\varphi_0)$ $\varphi_0=\arctan\frac{\theta_0w_n}{\dot{\theta}_0}$

单自由度系统有阻尼运动 $\xi\neq0$



阻尼：振动过程中，系统所受的阻力。

粘性阻尼：在很多情况下，振体速度不大时，由于介质粘性引起的阻尼认为阻力与速度的一次方成正比，这种阻尼称为粘性阻尼。

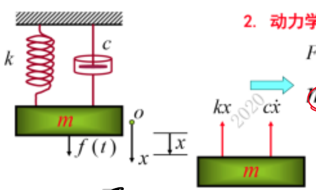
阻尼系数：使阻尼器产生单位速度所需施加的力，单位：N·s/m

◆ 控制方程

1. 受力特点 $F=-kx-c\dot{x}$
2. 动力学方程

$F=-kx-c\dot{x}=ma=m\ddot{x}$

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$



动力学方程： $\ddot{x}+2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0$ 固有频率 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 相对阻尼系数 $\zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}}$

令： $x=e^{\lambda t}$ ☆

特征方程： $\lambda^2+2\zeta\omega_0\lambda+\omega_0^2=0$ ☆推导很重要（2周上）

特征根： $\lambda_{1,2}=-\zeta\omega_0\pm\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}$

三种情况： $\zeta<1$ 欠阻尼 $\zeta>1$ 过阻尼 $\zeta=1$ 临界阻尼 二阶导

第一种情况： 欠阻尼 $\zeta<1$

特征根： $\lambda_{1,2}=-\zeta\omega_0\pm i\omega_d$ 两个复数根

振动解： $x(t)=e^{-\zeta\omega_0t}(c_1\cos\omega_dt+c_2\sin\omega_dt)$

c_1、c_2：初始条件决定 ???why!!!

欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$\begin{cases} e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t \end{cases}$

(因果关系：x_1 x_2 …)

推导

$F=ma$

$m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}$

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$

设 $x=e^{\lambda t}$

特征方程

$\lambda^2+\frac{c}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0$

令 $W_0=\frac{k}{m}$ $\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}$

$\therefore \lambda^2+2\xi W_n\lambda+W_n^2=0$

$\lambda=\frac{-2\xi W_n\pm\sqrt{4\xi^2W_n^2-4W_n^2}}{2}$

$\lambda=-\xi W_n\pm W_n\sqrt{\xi^2-1}$

$W_n\sqrt{1-\xi^2}=W_d$
$W_n=W_0$

$\therefore$ 当 $\xi<1$ 时

$\lambda=-\xi W_n\pm iW_n\sqrt{1-\xi^2}=-\xi W_n\pm iW_d$

$x(t)=e^{\lambda t}(=e^{-\xi W_n}e^{iW_d})$

特征根：$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_d$ 两个复数根

振动解： $x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}(c_1\cos\omega_d t + c_2\sin\omega_d t)$

c_1、c_2：初始条件决定 ¿¿¿why???

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t \end{cases}$$

理解：λ_1, λ_2 代入应有2个解 \ x_2
eg: $x_1 = e^{-\zeta\omega_n t - j\omega_d t}$
$= e^{-\zeta\omega_n t}(\sin\omega_d t - j\cos\omega_d t)$
$\therefore x_2 = e^{-\zeta\omega_n t}(\sin\omega_d t + j\cos\omega_d t)$
x_1, x_2 都为代入的解
$\therefore$ 线性相加也成立 $x = \square x_1 + \square x_2$
$\therefore$ 形成这种解

$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ 阻尼固有频率 有阻尼的自由振动频率

设初始条件： $x(0) = x_0$ $\quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

则： $x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(x_0\cos\omega_d t + \dfrac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$ （$\sin\theta$，$\cos\theta$）

或： $x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}A\sin(\omega_d t + \theta)$

$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d}\right)^2}$ $\quad \theta = tg^{-1}\dfrac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}$ $\quad tg^{-1} = \arctan$

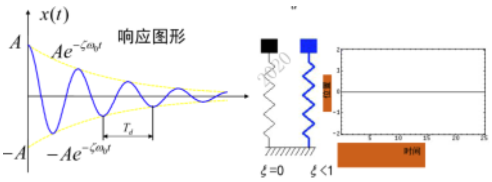
振动解： $x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(x_0\cos\omega_d t + \dfrac{x_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) = e^{-\zeta\omega_0 t}A\sin(\omega_d t + \theta)$

阻尼固有频率 $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ $\quad \omega_n = \omega_0$

阻尼自由振动周期： $T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

T_0：无阻尼自由振动的周期

阻尼自由振动的周期大于无阻尼自由振动的周期 周期大，频率小



欠阻尼是一种振幅逐渐衰减的振动

◆由于有衰减项的存在，因此阻尼振动既不是简谐的，也不是周期的。而是随着时间t趋于无穷时，振幅逐渐衰减为零，系统趋于静止。这是阻尼自由振动和无阻尼自由振动的主要区别之一。

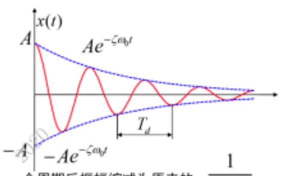
减幅系数

评价阻尼对振幅衰减快慢的影响

定义为相邻两个振幅的比值：

$$\eta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_0 t_i}}{Ae^{-\zeta\omega_0(t_i + T_d)}} = e^{\zeta\omega_0 T_d}$$

与 t 无关，任意两个相邻振幅之比均为



一个周期后振幅缩减为原来的 $\dfrac{1}{e^{\zeta\omega_0 T_d}}$

衰减振动的频率为ω_d，振幅衰减的快慢取决于$\zeta\omega_0$，这两个重要的特征反映在特征方程的特征根的实部和虚部 $\quad \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_d$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(x_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) = e^{-\zeta\omega_0 t}A\sin(\omega_d t + \theta)$$

- 只要有极弱的阻尼 就可以使振动 迅速衰减
- 两个阻尼比相同 固有频率大的系统自由振动衰减得快
  → 高频成分 衰减快

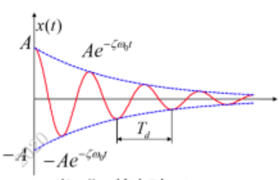
实际中常采用对数衰减率 ：便于工程使用

$\ln\eta = \quad \delta = \ln\dfrac{A_i}{A_{i+1}} = \ln\eta = \zeta\omega_0 T_d$

实验求解 ζ

利用相隔 j 个周期的两个峰值 进行求解

$$\frac{A_i}{A_{i+j}} = \left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right)\left(\frac{A_{i+1}}{A_{i+2}}\right)\cdots\left(\frac{A_{i+j-1}}{A_{i+j}}\right) = \eta^j$$



得： $\delta = \dfrac{1}{j}\ln\dfrac{A_i}{A_{i+j}} = \dfrac{1}{j}\delta j$

$= \zeta\omega_0\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} = \boxed{\dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta}$ 当 ζ 较小时 ⇒ $\boxed{\zeta = \dfrac{\delta}{2\pi}}$ $\quad \zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{km}}$

eg、P80

有一阻尼单自由度系统，测得质量m=5kg，刚度系数k=500N/m。试验测得在6个阻尼自然周期内振幅由0.02m衰减到0.012m，试求系统的阻尼比和阻尼器的阻尼系数。

$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$

$x(t) = e^{\lambda t}\left(= e^{-\zeta\omega_n}e^{i\omega_d}\right)$
$= e^{-\zeta\omega_n t}(C_1\cos\omega_d t + C_2\sin\omega_d t)$

当已知 $x_0, \dot{x}_0$ 时

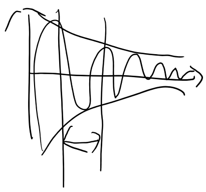
$x_0 = C_1$
$\dot{x}_0 = -\zeta\omega_n C_1 + C_2\omega_d$
$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \dfrac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

$$\left(-\zeta\omega_n \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}}_{1}(C_1\underbrace{\cos\omega_d t}_{1} + \underbrace{C_2\sin\omega_d t}_{0}) + \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}}_{1}(\underbrace{-C_1\omega_d\sin\omega_d t}_{0} + C_2\omega_d\underbrace{\cos\omega_d t}_{1})\right)$$

$\therefore x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(x_0\cos\omega_d t + \dfrac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$ （sin，cos）
$= e^{-\zeta\omega_n t}A\sin(\omega_d t + \theta)$ $\quad a + bj$ 。。

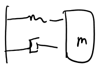
其中 $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}$ $\quad \theta = \arctan\dfrac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}$

$T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}$



$\eta = \dfrac{A_i}{A_{i+1}} = \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{e^{-\zeta\omega_n(t+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$

$\delta = \ln\eta = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$



$\delta = \frac{1}{6}\ln\frac{0.02}{0.012} = 0.08513$

$\delta = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta$

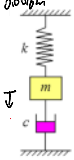
$\therefore \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = 0.01355$

$\because \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \therefore c = 2\zeta\sqrt{km} = 1.35\ Ns/m$

eg.P81 质量弹簧系统，mg=150N，$\boxed{\delta_{st}=1\text{cm}}$，$A_1$=0.8cm，$A_{21}$=0.16cm，求阻尼系数$c$ 。

静变位 → 挂着 m 不动时，拉伸长度 此外 $mg = k\delta_{st}$

0.01　　0.008 m　　0.0016 m



$F = ma \quad \therefore -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$　　$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$　$\lambda = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$\delta = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta$

$\delta = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{0.8}{0.16}\right) = 0.08047 \quad \therefore \zeta = 0.0128074$

$\because \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \therefore c = 2\zeta\sqrt{km} = 2\zeta\sqrt{\frac{mg}{\delta_{st}}\frac{mg}{g}} = 12.2736\ Ns/m$

eg.P83

◆试证明：在衰减振动中，在相邻两个位移最大值消耗的机械能ΔU，与开始时的机械能U_1之比为常量，在阻尼很小的时候，

泰勒展开 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

有：$\frac{\Delta U}{U_1} = 2\delta$

对于e^x在0处展开：$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$\cancel{\frac{\Delta U}{U_1} = \frac{\frac{1}{2}kA_1^2 - \frac{1}{2}kA_2^2}{\frac{1}{2}kA_0^2} = \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_0^2} = \frac{(e^{-\zeta\omega_n t_1} - e^{-\zeta\omega_n t_2})A^2}{A^2} = e^{-\zeta\omega_n T_d} = \eta^2}$

$\frac{\Delta U}{U_1} = \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}{\frac{1}{2}kx_1^2} = 1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$

$\cancel{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{e^{-\zeta\omega_n t_2}}{e^{-\zeta\omega_n t_1}}\right)^2 = e^{-2\zeta\omega_n T_d} = e^{-2\delta}}$

$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} \quad \therefore \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = e^{-2\delta}$

对 $e^{-2\delta}$ 进行 Taylor 展开　　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$e^{-2\delta} = 1 - 2\delta + \frac{(-2\delta)^2}{2!} + \frac{(-2\delta)^3}{3!} + \cdots$

当阻尼很小时 $\zeta \ll 1$，$\delta \approx 2\pi\zeta \ll 1$

$\therefore \frac{\Delta U}{U_1} = 2\delta - \frac{4\delta^2}{2!} - \frac{(-2\delta)^3}{3!} - \cdots \approx 2\delta$

动力学方程：$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

特征方程：$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$

特征根：$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$

第二种情况：　过阻尼　$\zeta > 1$

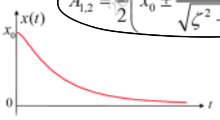
特征根：$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0$　　两个不等的负实根

振动解：$x = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A_1 e^{\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\omega_0 t} + A_2 e^{-\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\omega_0 t}\right)$

设初始条件：　$x(0) = x_0$　$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

则：$A_{1,2} = \frac{1}{2}\left(x_0 \pm \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\sqrt{\zeta^2 - 1}\cdot\omega_0}\right)$

响应图形



一种按指数规律衰减的非周期蠕动，没有振动发生

第三种情况：　临界阻尼　$\zeta = 1$

特征根：　$\lambda_{1,2} = -\omega_0$　　二重根

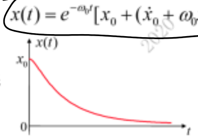
振动解：$x(t) = e^{-\omega_0 t}(c_1 + c_2 t)$

c_1、c_2：初始条件决定

设初始条件：　$x(0) = x_0$　$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

则：$x(t) = e^{-\omega_0 t}[x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_0 x_0)t]$

响应图形



仍然是按指数规律衰减的非周期运动

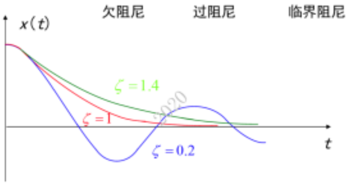
临界阻尼系数 c_{cr}　　$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ ➡ $c_{cr} = 2\sqrt{km}$

三种阻尼情况比较：　$\zeta < 1$　$\zeta > 1$　$\zeta = 1$

欠阻尼　过阻尼　临界阻尼

$x(t)$

三种阻尼情况比较： $\zeta<1$ 欠阻尼 $\zeta>1$ 过阻尼 $\zeta=1$ 临界阻尼



欠阻尼是一种振幅逐渐衰减的振动

过阻尼是一种按指数规律衰减的非周期蠕动，没有振动发生

临界也是按指数规律衰减的非周期运动，但比过阻尼衰减快些

小结： 动力学方程 $\ddot{x}+2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0$

$\zeta<1$ 欠阻尼 $x(t)=e^{-\zeta\omega_0 t}(x_0\cos\omega_d t+\dfrac{\dot{x}_0+\zeta\omega_0x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t)$

$\omega_d=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ 振幅衰减振动

$\zeta>1$ 过阻尼 $x=e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A_1e^{\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\omega_0 t}+A_2e^{-\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\omega_0 t}\right)$

$A_{1,2}=\dfrac{1}{2}\left(x_0\pm\dfrac{\dot{x}_0+\zeta\omega_0x_0}{\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\omega_0}\right)$ 按指数规律衰减的非周期蠕动

$\zeta=1$ 临界阻尼 $x(t)=e^{-\omega_0 t}[x_0+(\dot{x}_0+\omega_0x_0)t]$

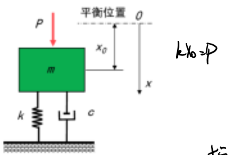
$c_{cr}=2\sqrt{km}$ 按指数规律衰减的非周期运动，比过阻尼衰减快

eg P52

例1：阻尼缓冲器

$\therefore \zeta<1$

静载荷 P 去除后质量块越过平衡位置得最大位移为初始位移的 10%



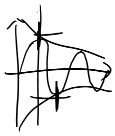
$kx_0=P$

求：

缓冲器的相对阻尼系数 ζ

$F=ma \quad m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}$

$\lambda^2+2\zeta w_n\lambda+w_n^2=0$



$x=e^{-\zeta w_n t}A\sin(w_n t+\varphi)$

$\dfrac{e^{-\zeta w_n \frac{T_d}{2}}}{e^{-\zeta w_n x_0}}=0.1$

$T_d=\dfrac{2\pi}{w_d}=\dfrac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\therefore \dfrac{-\zeta w_n\frac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}}{2}=\ln 0.1$

$\cancel{\dfrac{\zeta\,2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\approx 2\pi\zeta}$

$\therefore \zeta=\dfrac{(-\ln 0.1)\times 2}{2\pi}=0.732$ 明显近似误差大了

$\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{(-\ln 0.1)\times 2}{2\pi}=0.732935=t$

$\zeta=\sqrt{\dfrac{t^2}{1+t^2}}=0.5911$

标答：(麻烦…)

由题知 $\dot{x}(0)=0$ 设 $x(0)=x_0$

$x(t)=e^{-\zeta\omega_0 t}(x_0\cos\omega_d t+\dfrac{\dot{x}_0+\zeta\omega_0x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t)$

求导 ： $\dot{x}(t)=-\dfrac{\omega_0^2x_0}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\omega_d t$

设在时刻 t_1 质量越过平衡位置到达最大位移，这时速度为：

$\dot{x}(t)=-\dfrac{\omega_0^2x_0}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_0t_1}\sin\omega_d t_1=0 \Longrightarrow t_1=\dfrac{\pi}{\omega_d}$

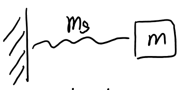
即经过半个周期后出现第一个振幅 x_1 $w_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,w_0$

$$x_1=x(t_1)=-x_0e^{-\zeta\omega_0t_1}=-x_0e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

由题知 $\left|\dfrac{x_1}{x_0}\right|=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=10\%$

解得： $\zeta=0.59$

eg、课上例子：10周周二下



弹簧有质量

将 m_s 等效到 m 块上

$\dfrac{m_s}{3}$

能量法，等效前后，总动能不变

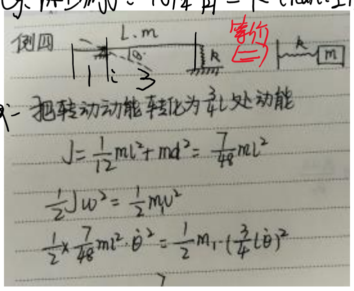
解：$\int_0^L \frac{1}{2}\times\frac{dl}{L}m_s\times(\frac{l}{L}\dot{x})^2=\frac{1}{2}\boxed{m_s'}\dot{x}^2$ 等效

$\therefore m_s'=\frac{1}{3}m_s$

$\therefore T_{总}=T_{块}+T_{弹}=\frac{1}{2}(m+\frac{m_s}{3})\dot{x}^2$

$\therefore W_n=\sqrt{\dfrac{k}{m+\frac{m_s}{3}}}$

eg、课上例子：10周周二下 credit：王开源


例四 L, m 1 : 3 k 等价 k m

解：把转动动能转化为 $\frac{3}{4}L$ 处动能

$J=\frac{1}{12}mL^2+md^2=\frac{7}{48}mL^2$

$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}m_1v^2$

$\frac{1}{2}\times\frac{7}{48}mL^2\cdot\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m_1\cdot(\frac{3}{4}L\dot{\theta})^2$

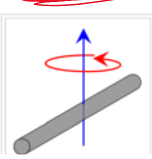
平行轴定理 [编辑]

平行轴定理是说，如果一个质量为m的物件，以某条经过质心A点的直线为轴，其转动惯量为I_A。在空间取点B，使得AB垂直于原本的轴。那么如果以经过B、平行于原本的轴的直线为轴，AB的距离为d，则$I_B=I_A+md^2$。

$\boxed{J=\frac{1}{12}mL^2+md^2=}\frac{1}{12}mL^2+m(\frac{L}{4})^2=\frac{7}{48}mL^2$

$\frac{1}{2}J w^2=\frac{1}{2}m_1V^2$

$\frac{1}{2}\times\frac{7}{48}mL^2\boxed{(\frac{V}{\frac{3}{4}L})^2}=\frac{1}{2}m_1V^2$ 等效



$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}m_1v^2$

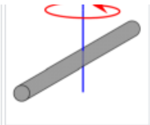
$\frac{1}{2}\times\frac{7}{48}ml^2\cdot\dot\theta^2=\frac{1}{2}m_1\cdot(\frac{3}{4}l\dot\theta)^2$

$m_1=\frac{7}{27}m$

$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}m_1v^2$

$\frac{1}{2}\times\frac{7}{48}ml^2\left(\frac{v}{\frac{3}{4}l}\right)^2=\frac{1}{2}m_1v^2$ 等效

$\therefore m_1=\frac{7}{27}m$



细长棒子的转动惯量是 $\frac{1}{12}ml^2$

单自由度系统受迫振动

对系统的激振则有两种不同情况：（1）力激励；（2）位移激励。

在外界激励的持续作用下系统被迫产生的振动称为受迫振动。

通常把作用在系统上的力激励，称为激振力，按激振力随时间变化的规律可以归纳为三类：

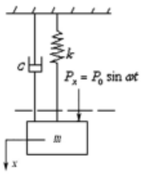
（1）简谐激振力；

（2）非简谐周期激振力；

（3）随时间任意变化的激振力。

单自由度有阻尼受迫振动：

若以平衡力位置0—0作为坐标原点，取质量块m的振动位移x为广义坐标，且向下为正，则可按牛顿运动定律直接写出该系统的运动微分方程式：



牛顿第二定律：$m\ddot x=-c\dot x-kx+P_0\sin\omega t$

$$m\ddot x+c\dot x+kx=P_0\sin\omega t$$

令 $\omega_n^2=\frac{k}{m}$、$\alpha=\frac{c}{2m}$、$q=\frac{P_0}{m}$

$$\ddot x+2\alpha\dot x+\omega_n^2x=q\sin\omega t$$

设置参数：

静变位： $B_0=\frac{q}{\omega_n^2}=\frac{P_0/m}{k/m}=\frac{P_0}{k}$

频率比： $\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}$

阻尼比： $\xi=\frac{\alpha}{\omega_n}=\frac{c}{c_c}$ （相对阻尼系统）

控制方程：

$$\ddot x+2\zeta\omega_n\dot x+\omega_n^2x=\omega_n^2B_0\sin\omega t$$

◆这是一个非齐次二阶常系数微分方程，根据微分方程理论，它的解由两部分组成：$x=x_1+x_2$

◆其中 x_1 为齐次微分方程 $\ddot x+2\zeta\omega_n\dot x+\omega_n^2x=0$的解，简称齐次解，

◆ x_2为 $\ddot x+2\zeta\omega_n\dot x+\omega_n^2x=\omega_n^2B_0\sin$的一个特解，又称稳态解

◆ x_1 代表系统的自由振动，由于有阻尼，自由振动将逐渐衰减而消失，只在振动开始后的短暂时间内存在，是瞬态振动，所以，x_1 称为方程的瞬态解。 $A=\sqrt{x_0^2+(\frac{\dot x_0+\zeta\omega_nx_0}{w_d})^2}$

当 $\zeta<1$ 时：$x_1=e^{-\zeta\omega nt}A\sin(\omega_dt+\varphi)$ $\varphi=tg^{-1}\frac{x_0\omega_d}{\dot x_0+\zeta\omega_nx_0}$

◆ x_2 为 $\ddot x+2\zeta\omega_n\dot x+\omega_n^2x=\omega_n^2B_0\sin$的一个特解，又称稳态解

$x_2=B\sin(\omega t-\psi)$

$\dot x_2=\omega B\cos(\omega t-\psi)$ $\quad B=\frac{B_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$

$\ddot x_2=-\omega^2B\sin(\omega t-\psi)$ $\quad \psi=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$

◆全解：$x=Ae^{-\xi\omega_nt}\sin(\omega_dt+\varphi)+B\sin(\omega t-\psi)$

$A=\sqrt{x_0^2+(\frac{\dot x_0+\zeta\omega_nx_0}{w_d})^2}$ $\quad B=\frac{B_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$

$\varphi=tg^{-1}\frac{x_0\omega_d}{\dot x_0+\zeta\omega_nx_0}$ $\quad \psi=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$

草纸

$ma=-kx-c\dot x+P_0\sin\omega t$

$m\ddot x+c\dot x+kx=P_0\sin\omega t$

$\ddot x+\frac{c}{m}\dot x+\frac{k}{m}x=\frac{P_0}{m}\sin\omega t$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$2\xi\omega_n=\frac{c}{m}$ $\therefore\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}=\frac{c}{c_c}$ $\quad c_c=2\sqrt{km}$

$\ddot x+2\xi\omega_n\dot x+\omega_n^2x=B_0\omega_n^2\sin\omega t$

$\therefore B_0=\frac{P_0}{m}\frac{m}{k}=\frac{P_0}{k}$

$x=x_1+x_2$

$x_1=e^{-\xi\omega_nt}A\sin(\omega_dt+\varphi)$ $\quad A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot x_0+\xi\omega_nx_0}{\omega_d}\right)^2}$ $\quad \varphi=\arctan\frac{x_0\omega_d}{\dot x_0+\xi\omega_nx_0}$

$x_2=B\sin(\omega t-\psi)$ $\quad B=$

$\dot x_2=B\omega\cos(\omega t-\psi)$

$\ddot x_2=-B\omega^2\sin(\omega t-\psi)$

代入得

$-B\omega^2\sin(\omega t-\psi)+2\xi\omega_nB\omega\cos(\omega t-\psi)+\omega_n^2B\sin(\omega t-\psi)=B_0\omega_n^2\sin\omega t$

$(B\omega_n^2-B\omega^2)(\sin\omega t\cos\psi-\cos\omega t\sin\psi)+2\xi\omega_nB\omega(\cos\omega t\cos\psi+\sin\omega t\sin\psi)=B_0\omega_n^2\sin\omega t$

$(B\omega_n^2-B\omega^2)(\cos\psi-\frac{\sin\psi}{\tan\omega t})+2\xi\omega_nB\omega(\frac{\cos\psi}{\tan\omega t}+\sin\psi)=B_0\omega_n^2$

$\underbrace{\frac{-(B\omega_n^2-B\omega^2)\sin\psi+2\xi\omega_nB\omega\cos\psi}{\tan\omega t}}_{=0}+\underbrace{(B\omega_n^2-B\omega^2)\cos\psi+2\xi\omega_nB\omega\sin\psi-B_0\omega_n^2}_{=0}=0$

$\therefore -(B\omega_n^2-B\omega^2)\sin\psi+2\xi\omega_nB\omega\cos\psi=0$

$\therefore\tan\psi=\frac{2\xi\omega_nB\omega}{B\omega_n^2-B\omega^2}$

当$\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}$时

$\tan\psi=\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$

$t=\sqrt{(2\xi\lambda)^2+(1-\lambda^2)^2}$

$(B\omega_n^2-B\omega^2)\cos\psi+2\xi\omega_nB\omega\sin\psi-B_0\omega_n^2=0$

$\because\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}$

$\therefore(1-\lambda^2)B\omega_n^2\cos\psi+2\xi\lambda B\omega_n^2\sin\psi-B_0\omega_n^2=0$

$(1-\lambda^2)\cos\psi+2\xi\lambda\sin\psi=\frac{B_0}{B}$

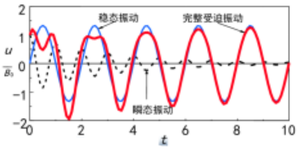
$(1-\lambda^2)\frac{1-\lambda^2}{t}+2\xi\lambda\frac{2\xi\lambda}{t}=\frac{B_0}{B}$

$\frac{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}{\sqrt{(2\xi\lambda)^2+(1-\lambda^2)^2}}=\frac{B_0}{B}$ $\quad\therefore B=\frac{B_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$

控制方程：$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^{\ 2}x=\omega_n^{\ 2}B_0\sin\omega t$

振动方程：$x=Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi)+B\sin(\omega t-\psi)$

◆右边第一项表示有阻尼的自由振动，后一项表示有阻尼的受迫振动。因此在开始振动称为瞬态振动，经过一段时间后衰减振动很快就衰减掉了，而受迫振动则持续下去，形成振动的稳态过程，这一过程中的振动称为稳态振动。



受迫振动响应的特征：

① 总的振动响应是瞬态振动和稳态振动的叠加；

② 随着时间的增加，瞬态振动消失，响应主要由稳态振动构成；

③ 稳态振动与激励同频，但与激励之间有相位差；

④ 稳态振动的振幅和相位差与初始条件无关，初始条件只影响系统的瞬态振动

◆一般我们不研究振动的暂态过程，因为它只是一个过渡现象，而只研究振动的稳态过程，即持续的稳态振动。因此我们可以只分析式中的第二项，即：

$$x=B\sin(\omega t-\psi)$$

$$B=\frac{B_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}\qquad \psi=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

◆振动特性的讨论：

（1）受迫振动的规律

系统受迫振动的稳态过程是简谐振动。而且只要有激振力存在，这一振动就不会被阻尼衰减掉。

（2）受迫振动的频率

受迫振动的频率与激振力的频率 ω 相同.

（3）受迫振动的振幅

在实际工程问题中，若振幅超过允许的限度，机器零件中会产生过大的交变应力，而导致疲劳破坏，或者会影响机器及仪表的精度。因此必须搞清楚影响振幅的各种因素：

1）初始条件的影响——自由振动的振幅与初始条件有关，而受迫振动的振幅与初始条件无关

2）激振力幅P_0的影响——由于 $B_0=\frac{P_0}{k}$ ，所以振幅B与激振力幅P_0成线性关系，P_0越大，则B越大。

3）激振力频率 ω 及系统固有频率 ω_n的影响——以振幅比 $\frac{B}{B_0}$ 为纵坐标，

以频率比 $\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}$ 为横坐标，以阻尼比 ξ 为参变量，可作出幅频响应曲线如图1-10，它表明了系统位移对频率的响应特性。

令 $$\beta=\frac{B}{B_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$$ ——振幅的放大因子

(1) $\lambda<<1(\omega<<\omega_n)$时，$\beta\to1$，

$B\to B_0$

此时的振幅相当于把激振力幅P_0当作静载荷加于系统上使系统产生的静变位。这说明，激振力变化缓慢时，其动力影响不大，故受迫振动的振幅和静变位无多大区别。

(2) $\lambda>>1(\omega>>\omega_n)$时，$\beta\to0$，

当 ω 继续增大到 $\lambda>1$ 后，振幅便迅速下降。当 $\lambda \gg 2$ 时，$\beta\to0$，即振幅越来越小，最后振动趋于消失。

当 $\lambda>2$ 时，$\beta<1$，即系统振动的振幅将小于静变位。这是隔震设计的理论基础。

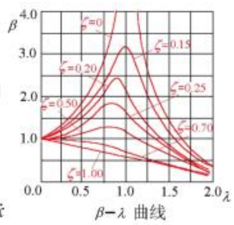
解释：激振力的方向改变过快，振动物体由于惯性来不及发生相应的变化，结果是近似地停着不动。

(3) $\lambda\to1(\omega\to\omega_n)$时，

当 $\omega\to\omega_n$ 或 $\lambda\to1$ 时，振幅B 将急剧增加并达到最大值，这种现象称为"共振"。在共振区附近，振幅的大小主要取决于系统的阻尼大小，阻尼越小，共振就越厉害，共振时的振幅为B_r，由于共振时 $\lambda=1$，所以有：

$$B_r=\frac{B_0}{2\xi}=\frac{q}{2\alpha\omega_n}$$

1. 当 $\lambda<<1$ 时，扰力主要与弹性力平衡。因为此时激励的频率很低；
2. 当 $\lambda>>1$ 时，扰力的频率远高于系统的固有频率，扰力主要和惯性力平衡
3. 当 $\lambda\to1$时，强迫振动的振幅可能很大，唯一限制因素是系统的阻尼。



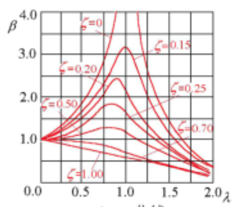
$\beta-\lambda$ 曲线

$F_s=-kx\qquad F_m=-m\ddot{x}\qquad F_d=-c\dot{x}$

（4）阻尼对振幅的影响

◆ 阻尼增大可以有效的减低共振时的振幅。当阻尼为零时，共振振幅B_r趋于无穷大。增大阻尼将使B_r相应减小。

◆ 阻尼在共振区，对减小振幅有显著作用；在远离共振区，阻尼对减小振幅的作用不大



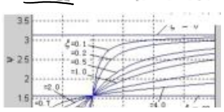
$\beta-\lambda$ 曲线

阻尼固有频率：$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

频率比： $\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}<\frac{\omega}{\omega_d}$

当ξ《1时 $\omega_d\approx\omega_n$ $\qquad \lambda=\frac{\omega}{\omega_n}\approx\frac{\omega}{\omega_d}$

共振： λ=1 → $B_r=\frac{B_0}{2\xi}$ $\qquad \beta=\frac{B}{B_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$

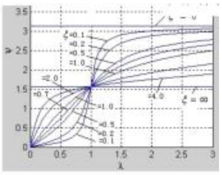


（5）受迫振动的相位差

以ψ为纵坐标，以频率比λ为横坐标，

（5）受迫振动的相位差

以ψ为纵坐标，以频率比λ为横坐标，以阻尼比ξ为参变量，将 $\psi=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$ 绘成如图1-11所示的曲线，则该曲线即称为相频曲线。



(1) ψ总在0至π区间内变化，受迫振动位移滞后于激振力。

(2) 相频曲线（ψ－λ曲线）是一条单调上升的曲线。ψ随λ增大而增大。

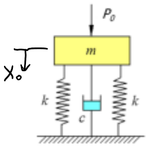
(3) 共振时λ=1，$\psi=\frac{\pi}{2}$，曲线上升最快，阻尼值不同的曲线，均交于这一点。

(4) λ>1时，ψ随λ增大而增大。当λ≫1时 $\psi=\pi$，反相。

共振： $\lambda=1$ $B_n=\frac{B_0}{2\xi}$ $\psi=\frac{\pi}{2}$

eg. P116 例1 已知重量P=3500N，k=20000N/m，幅值P_0=100N的正弦激励，激励频率f=2.5Hz，c=1600N·s/m，求强迫振动解程。

X_2部分



$\omega=2\pi f$

$F=ma$ $m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}+P_0\sin\omega t$

$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{P_0}{m}\sin\omega t$

$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2=B_0\omega_n\sin\omega t$

$$\begin{cases}\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\\ \xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}\\ B_0=\frac{P_0}{k}\end{cases}$$

$\omega=2\pi f=15.7080$

$\omega_n=\sqrt{\frac{2\times k\times g}{P}}=10.5830$

$\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}=0.\cancel{673733}=1.4843$

$\xi=\frac{c}{2\sqrt{2\times k\times\frac{P}{g}}}=0.211660$ $2\xi\lambda=0.6283$

$1-\lambda^2=-1.2031$

$B_0=\frac{P_0}{2k}=0.0025$

结论 ∴ $x=A\sin(\omega_d t+\varphi)+B\sin(\omega t-\psi)$

$$\begin{cases}A=\frac{\cancel{\quad}}{\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+x_0\xi\omega_n}{\omega_d}\right)^2}} & \varphi=\arctan\frac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0+x_0\xi\omega_n}\\ B=\frac{B_0}{\sqrt{(2\xi\lambda)^2+(1-\lambda^2)^2}} & \psi=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}\end{cases}$$

∴ $x_2=\frac{0.0025}{\sqrt{0.6283^2+1.2031^2}}\sin\left(2\pi\times2.5t-\arctan\frac{0.6283}{-1.2031}\right)$

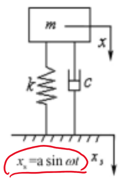
$=0.00184192\sin(5\pi t+0.153136\pi)$

-0.847π 差个π

$\boxed{\psi\in[0,\pi]}$

位移干扰引起的

以上分析的是力干扰，还有一种位移干扰也可以使系统产生受迫振动。支承点的运动就是一种位移干扰，例如地基的振动引起的机器振动，机器的振动引起仪器的振动，汽车驶过不平路面产生的振动等等。



控制方程：

$$m\ddot{x}=-k(x-x_s)-c(\dot{x}-\dot{x}_s)$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{x}_s+kx_s$$

$$x=B\sin(\omega t-\psi)$$

振幅： $B=a\sqrt{\frac{k^2+c^2\omega^2}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}}=a\sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$

相位差ψ： $\tan\psi=\frac{mc\omega^3}{k(k-m\omega^2)+c^2\omega^2}=\frac{2\xi\lambda^3}{1-\lambda^2+(2\xi\lambda)^2}$

振幅放大因子β： $\beta=\frac{B}{a}=\sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$

$F=ma$

$m\ddot{x}=-k(x-x_s)-c(\dot{x}-\dot{x}_s)$

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kx_s+c\dot{x}_s$

$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{c}{m}\dot{x}_s+\frac{k}{m}x_s$

$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=2\xi\omega_n\dot{x}_s+\omega_n^2x_s$ $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}$

$x=B\sin(\omega t-\psi)$ $x_s=a\sin\omega t$

$\dot{x}=B\omega\cos(\omega t-\psi)$ $\dot{x}_s=a\omega\cos\omega t$

$\ddot{x}=-B\omega^2\sin(\omega t-\psi)$

$-B\omega^2\sin(\omega t-\psi)+2\xi\omega_nB\omega\cos(\omega t-\psi)+\omega_n^2B\sin(\omega t-\psi)=2\xi\omega_n a\omega\cos\omega t+\omega_n^2a\sin\omega t$

同除 $B\omega_n^2$ 其中 $\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}$

$(1-\lambda^2)\sin(\omega t-\psi)+2\xi\lambda\cos(\omega t-\psi)=2\xi\lambda\frac{a}{B}\cos\omega t+\frac{a}{B}\sin\omega t$

$(1-\lambda^2)(\sin\omega t\cos\psi-\cos\omega t\sin\psi)+2\xi\lambda(\cos\omega t\cos\psi+\sin\omega t\sin\psi)=2\xi\lambda\frac{a}{B}\cos\omega t+\frac{a}{B}\sin\omega t$

同除 $\sin\omega t$

$(1-\lambda^2)\left(\cos\psi-\frac{\sin\psi}{\tan\omega t}\right)+2\xi\lambda\left(\frac{\cos\psi}{\tan\omega t}+\sin\psi\right)=2\xi\lambda\frac{a}{B}\frac{1}{\tan\omega t}+\frac{a}{B}$

$\underbrace{\left(2\xi\lambda\cos\psi-2\xi\lambda\frac{a}{B}-(1-\lambda^2)\sin\psi\right)}_{0}\frac{1}{\tan\omega t}+\underbrace{(1-\lambda^2)\cos\psi+2\xi\lambda\sin\psi-\frac{a}{B}}_{0}=0$

$$\begin{cases}2\xi\lambda\cos\psi-2\xi\lambda\frac{a}{B}-(1-\lambda^2)\sin\psi=0\\ (1-\lambda^2)\cos\psi+2\xi\lambda\sin\psi-\frac{a}{B}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}\cos\psi-\sin\psi=\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}\frac{a}{B}\\ \frac{1-\lambda^2}{2\xi\lambda}\cos\psi+\sin\psi=\frac{1}{2\xi\lambda}\frac{a}{B}\end{cases}$$

$\begin{pmatrix}s=2\xi\lambda\\ t=1-\lambda^2\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\sin\psi=\frac{s(1-t)}{s^2+t^2}\frac{a}{B}\\ \cos\psi=\frac{s^2+t}{s^2+t^2}\frac{a}{B}\end{cases}$$

∴ $\psi=\arctan\frac{s(1-t)}{s^2+t}=\arctan\frac{2\xi\lambda^3}{(2\xi\lambda)^2+1-\lambda^2}$

$\sin\psi^2+\cos\psi^2=1$

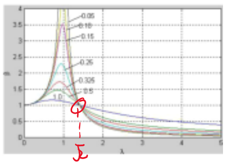
∴ $\left(\frac{s(1-t)}{s^2+t^2}\right)^2+\left(\frac{s^2+t}{s^2+t^2}\right)^2=\left(\frac{B}{a}\right)^2$

$B=a\frac{\sqrt{(s(1-t))^2+(s^2+t)^2}}{s^2+t^2}$

$=a\frac{\sqrt{(s^2+t^2)(1+s^2)}}{s^2+t^2}$

$=a\sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(2\xi\lambda)^2+(1-\lambda^2)^2}}$

若以λ为横坐标，β为纵坐标，ξ为参变量，则可做出如图1-13所示的幅频特性曲线。



◆与在简谐激振力作用下的幅频响应曲线基本相同

◆在 $\lambda=0$ 时，振幅等于支承运动的振幅

◆在 $\lambda=\sqrt{2}$ 时，振幅等于支承运动的振幅

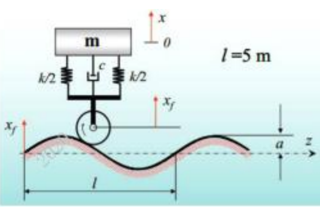
◆在 $\lambda<\sqrt{2}$ 时，阻尼越小，振幅越大且大于支撑运动振幅

◆当 $\lambda>\sqrt{2}$ 时，阻尼越小，振幅越小且小于支撑运动振幅，随着频率增大，振幅趋向于0

这一特性在研究隔振和测振时是很有用的。

eg. P121

一拖车在不平坦的道路上行驶，已知拖车的质量满载时为m_1=1000kg，空载时为m_2=250kg，悬挂弹簧的刚度为k=350kN/m，阻尼比在满载时为ξ_1=0.5，



车速为v=100km/h，路面简化为正弦波形，可表示为

$$x_f=a\sin\frac{2\pi z}{l}$$

求：拖车在满载可空载时的振幅比。

$F=ma$ $m\ddot{x}=-k(x-x_s)-c(\dot{x}-\dot{x}_s)$ $\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{c}{m}\dot{x}_s+\frac{k}{m}x_s$

$z=vt$

∴ $x_c=a\sin\frac{2\pi vt}{l}$ $\omega=\frac{2\pi v}{l}=\frac{2\pi\times100}{\quad}=34.907$ rad/s

$F=ma$　$m\ddot{x}=-k(x-x_s)-c(\dot{x}-\dot{x}_s)$　$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{c}{m}\dot{x}_s+\frac{k}{m}x_s$

$z=vt$

$\therefore x_s=a\sin\frac{2\pi vt}{l}$　$\omega=\frac{2\pi v}{l}=\frac{2\pi\times 100}{3.6\times 5}=34.907$ rad/s

$x=B\sin(\omega t-\varphi)$　$\omega_{n_1}=\sqrt{\frac{k}{m_1}}=18.7082$　$\omega_{n2}=37.4166$

$B=a\sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(2\xi\lambda)^2+(1-\lambda^2)^2}}$　$\xi_1=\frac{c}{2\sqrt{km_1}}$　当 $m=1000$kg时 $\xi_1=0.5$　$\therefore c=18708$　$\therefore \xi_1=1$

$\varphi=\arctan\frac{2\xi\lambda^3}{(2\xi\lambda)^2+1-\lambda^2}$　$\lambda_1=\frac{\omega}{\omega_{n_1}}=1.866$　$\lambda_2=\frac{\omega}{\omega_{n2}}=0.932$

$\therefore$ 振幅比：$\frac{B_1}{B_2}=\frac{\sqrt{\frac{1+(2\xi_1\lambda_1)^2}{(2\xi_1\lambda_1)^2+(1-\lambda_1^2)^2}}}{\sqrt{\frac{1+(2\xi_2\lambda_2)^2}{(2\xi_2\lambda_2)^2+(1-\lambda_2^2)^2}}}=\frac{0.681}{1.131}=0.6$

非简谐周期激振力受迫振动

对于非简谐周期振动，可以用傅里叶变换，将它分解成一系列简谐波的组合，分别进行求解，再将各个响应进行叠加得到综合响应

理解即可，此处不考

非周期激励作用的特点：

- ◆相应地，瞬态激励引起的系统振动响应持续时间也不长，但响应的峰值往往很大，使结构产生较大应力和变形。
- ◆振动系统通常没有稳态运动，只有瞬态振动
- ◆在激励消失后，振动系统进行阻尼自由振动，即所谓的剩余振动。
- ◆振动系统在任意激励下的运动，包括剩余振动，称为振动系统对任意激励的响应。

脉冲响应函数法

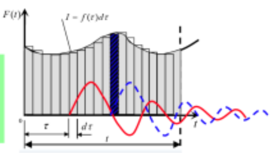
解决问题的思路：

•把非周期激振力看作是一系列作用时间极短的分力的叠加；

•在脉冲力作用下的响应— 应用动量定理；

•总响应— 叠加原理。

任何一个激励总可以分解为一系列微小脉冲的叠加，系统响应就是这些微小脉冲的响应的叠加。



脉冲

◆如果$F(t)$的幅值很大，但作用时间很短，即 $\varepsilon << 1$，那么如果冲量：

$$I=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}F(t)dt$$

仍然为通常的数量级，这种力 $F(t)$ 称为脉冲力。

- 如果$F(t)$的作用时间为$(-\varepsilon,\varepsilon)$（为任意非负实数），即当$t>\varepsilon$和$t<-\varepsilon$ 时，$F(t)=0$，在这过程中，动量的改变量：

$$mv(\varepsilon)-mv(-\varepsilon)=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}F(t)dt=I$$

- 上式的物理含义：物体所受的冲量等于物体动量的改变量。这种描述成为状态描述。

δ 函数：

◆它表示力的值在t=0处无穷大，但对物体的冲量为1的*单位脉冲力*。在定义中，这个力的持续时间为0，但冲量为1，是数学上的抽象，实际上不存在这种力，但该定义能够很好的反映脉冲力的本质，并在理论讨论中带来很大方便。

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\quad 且\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

函数的单位：为自变量的倒数，如自变量是时间，则单位是1 / s。

任意时刻脉冲力的表示

$\boxed{\begin{array}{l} I\to N\cdot s\\ \delta(t-\tau)\to s^{-1}\end{array}}\to N$

◆在τ 时刻的 δ 函数可以表示为：

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}+\infty & t=\tau\\ 0 & t\neq\tau\end{cases}\quad 且\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)dt=1$$

◆在τ时刻的δ函数可以表示为： $\delta(t-\tau) \to \delta(t)$

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}+\infty & t=\tau \\ 0 & t\neq\tau\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)dt=1$$

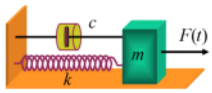
◆利用δ函数，在任意时刻τ作用的脉冲力可以表示为：

$$F(t)=I\delta(t-\tau)$$

◆上式的物理意义：在τ时刻的一个力值无限大，但作用时间为0，冲量为I的脉冲力

脉冲响应

◆设单自由度系统在t=0以前静止，在t=0受到脉冲力 $F(t)=I\delta(t)$



$$\begin{cases} m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=I\delta(t) \\ x(0^-)=0, \quad \dot{x}(0^-)=0 \end{cases}$$

◆0-表示小于0但无限接近0的时刻，可以明确表示t=0以前的状态。同样0+表示大于0但无限接近0的时刻。

◆根据动量定理：在0-到0+这段时间系统的动量改变： $m\dot{x}(0^+)-m\dot{x}(0^-)=I$

◆在t=0时的脉冲力作用下，系统的速度由 $\dot{x}(0^-)$ 变成 $\dot{x}(0^+)=I/m$，而系统的位移没有变化，而当t>0后，系统不受外力，自由振动。系统受到脉冲力作用后的运动微分方程：

$$\begin{cases} m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \\ x(0^+)=0, \quad \dot{x}(0^+)=\dfrac{I}{m} \end{cases}$$

recall：

2）当$\zeta<1$，方程解为$x(t)=Ae^{-\zeta w_n t}sin(w_d t+\phi_d)$

其中，$A=\sqrt{{x_0}^2+(\frac{\dot{x}_0+\zeta w_n x_0}{w_d})^2}$

$\phi=tan^{-1}(\frac{w_d x_0}{\dot{x}_0+\zeta w_n x_0})$

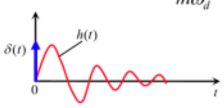
◆它的解为： $x(t)=\dfrac{I}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \quad (t\geq 0)$

◆这就是初始时刻静止的系统在t=0时刻受到脉冲力 $I\delta(t)$ 作用后的响应。

◆系统受到单位脉冲力作用，此时的系统的响应称为系统单位脉冲响应简称系统脉冲响应，用$h(t)$表示：

I变为了1

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \quad (t\geq 0)$$

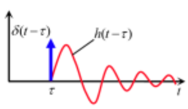


$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t, & t\geq 0 \\ 0, & t<0\end{cases}$$

◆显然，在 $t=\tau$以前静止的系统在 $t=\tau$时，受到一个单位脉冲激励后的响应为：一般脉冲响应

左加右减

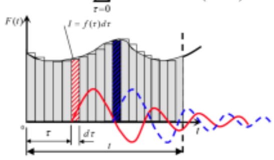
$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau) \quad (t\geq\tau)$$



$$h(t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau), & t\geq\tau \\ 0, & t<\tau\end{cases}$$

•把非周期激振力F（t）看作是一系列脉冲力的叠加；

- $t=\tau$ 时刻的脉冲力 $F(\tau)\ \Delta\tau\delta(t-\tau)$
- 该脉冲力的响应 $F(\tau)\ \Delta\tau h(t-\tau)$
- 系统在t时刻的响应 $x(t)=\sum_{\tau=0}^{t}F(\tau)\ \Delta\tau h(t-\tau)$



令 $\Delta\tau \to 0$，求和变成积分

$$x(t)=\int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

如果系统初始条件不为零，即：$x(0)=x_0$， $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$

系统总的响应为

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(x_0\cos\omega_d t+\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)+\int_0^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

eg. P150 老师没讲 12周周二上

拉氏变换

定义略

性质：

1 线性

$\mathscr{L}[a_1g_1(t)+a_2g_2(t)]=a_1\mathscr{L}[g_1(t)]+a_2\mathscr{L}[g_2(t)]$

2 微分

$\mathscr{L}[g'(t)]=s\mathscr{L}[g(t)]-g(0)$

$\mathscr{L}[g''(t)]=s^2\mathscr{L}[g(t)]-sg(0)-g'(0)$

3 卷积定理

$\mathscr{L}[g_1(t)*g_2(t)]=\mathscr{L}[g_1(t)]\,\mathscr{L}[g_2(t)]$

4 延迟

$\mathscr{L}[g(t-\tau)]=e^{-s\tau}\mathscr{L}[g(t)]$

序号	$f(t)$	$F(s)$	序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$(Dirac δ 函数)	1	8	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
2	$1(t)$(单位阶跃函数)	$\frac{1}{s}$	9	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
3	$t^n, n=1,2,\cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$1-\cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
4	$e^{-\omega t}$	$\frac{1}{s+\omega}$	11	$\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t}\sin\omega\sqrt{1-\xi^2}t$	$\frac{\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$
5	$te^{-\omega t}$	$\frac{1}{(s+\omega)^2}$	12	$\left(\cos\omega t-\frac{a}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	13	$\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega t}\times\sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}t-\varphi\right)$ $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{s}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$
7	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	14	$e^{-\xi\omega t}\left[\cos\omega\sqrt{1-\xi^2}t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega\sqrt{1-\xi^2}t\right]$	$\frac{s+2\xi\omega}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$

◆1. 将微分方程通过拉氏变换转换为s的代数方程；

◆2. 解s的代数方程，得到待解变量的拉氏变换表达式；

◆3. 做拉氏反变换，即求解微分方程的时域解

用拉普拉斯变换求解运动微分方程

方程 $\begin{cases} m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t) \\ x(0)=x_0,\dot{x}(0)=\dot{x}_0 \end{cases}$

对方程两边做拉普拉斯变换

$m[s^2X(s)-sx_0-\dot{x}_0]+c[sX(s)-x_0]+kX(s)=F(s)$

响应 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$X(s)=\frac{(ms+c)x_0}{ms^2+cs+k}+\frac{m\dot{x}_0}{ms^2+cs+k}+\frac{F(s)}{ms^2+cs+k}$$

$$X(s)=\frac{(s+\xi\omega_n)x_0}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}+\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}+\frac{F(s)}{m(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

拉普拉斯反变换为

$$x(t)=x_0e^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_d t+\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t$$

$$+\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$m\omega_d$

eg. P163

例：用拉普拉斯变换求方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}+kx=F_0\sin\omega t \\ x(0)=0,\dot{x}(0)=0 \end{cases}$$

$$ms^2X+kX=F_0\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$X(s)=\frac{Fw}{(s^2+w^2)(ms^2+k)}=\frac{Fw}{m}\frac{1}{s^2+w^2}\frac{1}{s^2+\frac{k}{m}}$$

错误
analysis错误

$$\cancel{\frac{w}{s^2+w^2}\frac{F}{ms^2+k}=\frac{w}{s^2+w^2}\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+\frac{k}{m}}\frac{F}{\sqrt{mk}}}$$

$$\cancel{x(t)=\frac{F}{\sqrt{km}}\sin wt\sin w_nt}\quad 其中\ w_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$X(s)=\left(\frac{As+B}{s^2+w^2}+\frac{Cs+D}{s^2+w_n^2}\right)\frac{Fw}{m}$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B=-\frac{1}{w^2-w_n^2} \\ C=0 \\ D=\frac{1}{w^2-w_n^2} \end{cases}$$

$$\therefore x(t)=\frac{Fw}{m}\left(-\frac{1}{(w^2-w_n^2)w}\sin wt+\frac{1}{(w^2-w_n^2)w_n}\sin w_nt\right)$$ 与标答等价

< 少一种共振情况

标答：

解：由于 $\mathscr{L}[F_0\sin\omega t]=\frac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}$

对方程两边做拉普拉斯变换

$$(ms^2+k)X(s)=\frac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}$$

即 $$X(s)=\frac{F_0}{(ms^2+k)}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

如果$\omega\neq\omega_n$，上式写成

$$X(s)=\frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\cdot\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-\frac{\omega}{\omega_n}\cdot\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\right)$$

即 $$x(t)=\frac{F_0}{k[1-(\omega/\omega_n)^2]}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

当$\omega=\omega_n$，即共振时

$$X(s)=\frac{F_0\omega_n}{m}\cdot\frac{1}{(s^2+\omega_n^2)^2}$$

由于

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega_n^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega_n^3}(\sin\omega_n t-\omega_n t\cos\omega_n t)$$

因此，共振时系统的响应为

$$x(t)=\frac{F_0\omega_n}{m}\cdot\frac{1}{2\omega_n^3}(\sin\omega_n t-\omega_n t\cos\omega_n t)$$
$$=\frac{F_0}{2k}(\sin\omega_n t-\omega_n t\cos\omega_n t)$$

eg. P166 考试考到写出 X(s) 即可 不需要反拉

设一单自由度弹簧质量阻尼系统，受任意激励F(t)，初始条件x_0和$\dot{x}_0$。现用拉普拉斯变换法来求系统相应的一般表达式。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

$$\cancel{s^2X+\frac{c}{m}sX+\frac{k}{m}X=\frac{F(s)}{m}}$$

$$\cancel{X(s)=\frac{F(s)}{m(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m})}}$$

$$s^2X(s)-sx_0-\dot{x}_0+\frac{c}{m}(sX(s)-x_0)+\frac{k}{m}X(s)=\frac{F(s)}{m}$$

$$(s^2+2\xi ws+w_n^2)X(s)=\frac{F(s)}{m}+sx_0+\dot{x}_0+2\xi w_nx_0$$

$$\therefore X(s)=\frac{\frac{F(s)}{m}+sx_0+\dot{x}_0+2\xi w_nx_0}{s^2+2\xi ws+w_n^2}$$

考到这里结束

标答

$$X(s)[s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2]=\frac{F(s)}{m}+\dot{x}_0+x_0[s+2\zeta\omega_n]$$

响应x(t)拉普拉斯变换X(s)的表达式

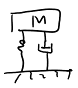
$$X(s)=\frac{F(t)}{m(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}+\frac{\dot{x}_0}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{(s+2\zeta\omega_n)x_0}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

如果考，会给出一阶二阶导公式
老师更想考微分方程的推导

跳过了P167 P168 题目（12月星2 第5节）P172 开始习题讲解

P169 随堂练习 TODO 去做

单自由度系统的质量m=10 kg，c=20 N.s/m, k=4000 N/m, x_0=0.01和$\dot{x}_0$=0, 根据下列条件求系统的总响应：
（1）作用在系统的外激励为$F(t)=F_0\cos wt$，其中F_0=100 N, w=10 rad/s.
(2) $F(t)$=0时的自由振动 $=F_0\sin(wt+\frac{\pi}{2})$



$$\begin{cases} m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos wt \\ x_0=0.01 \quad \dot{x}_0=0 \end{cases}$$

$$\sin x=\cos(x-\frac{\pi}{2})$$

(1) $$\ddot{x}+2\xi w_n\dot{x}+w_n^2=B_0w_n^2\sin wt$$

$$w_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=20 \qquad B_0=\frac{F_0}{k}=0.025$$

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}=0.05 \qquad 2\xi\lambda=0.05$$

$$\lambda=\frac{w}{w_n}=\frac{10}{20}=0.5 \qquad 1-\lambda^2=0.75$$

$$B=\frac{B_0}{\sqrt{(2\xi\lambda)^2+(1-\lambda^2)^2}}=\frac{0.025}{\sqrt{0.05^2+0.75^2}}=0.03326$$

$$\varphi=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}=\arctan\frac{0.05}{0.75}=0.066568$$

$\varphi\in(0,\pi)$

$$\therefore x(t)=B\sin(wt-\varphi)=0.03326\sin(wt-0.066568-\frac{\pi}{2})$$

这里怎么办

(2) $$x(t)=Ae^{-\xi w_nt}\sin(w_nt+\varphi)$$

$$A=\sqrt{(x_0)^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\xi w_nx_0}{w_d}\right)^2}=0.01$$

$$\varphi=\arctan\frac{x_0w_d}{\dot{x}_0+\xi w_nx_0}=1.520$$

$$w_d=\sqrt{1-\xi^2}\,w_n=19.97498$$

设 $x=e^{\lambda t}$

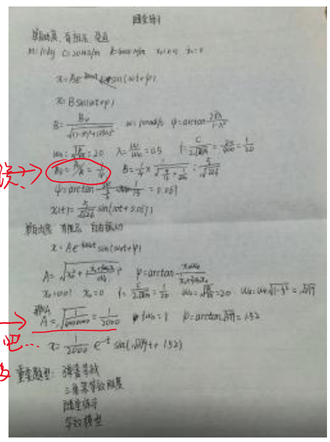
$$\lambda=-\xi w_n\pm w_nj\sqrt{1-\xi^2} \qquad e^{iw}=\cos w+i\sin w$$

$$x=e^{-\xi w_n\pm w_nj\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$x=e^{-\xi w_nt}(c_1\cos w_dt+c_2\sin w_dt)$$

$$\dot{x}=-\xi w_ne^{-\xi w_nt}(\ -\ -\ -\ -\ )+-\ -\ -$$

$$\therefore x=e^{-\xi w_nt}A\sin(w_dt+\varphi)$$



计算错误

计算有误：
代x_0成$\dot{x}_0$了吧…
x_0位置反了

∴ $x(t)=0.01e^{-t}\sin(19.97498t+1.52)$

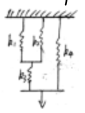
答案 13周周1第3节 24:52

计算：13周周1第3节 18:25
题：12周周2第6节

eg. 计算右图的等效刚度 第一章练习题

答同王思豪

$k_4+\dfrac{1}{\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_1+k_2}}$



eg. 右图所示的摄像机，放在三脚架上，腿长L，与竖直方向成夹角β，轴向沿杆的刚度为k，摄像机重m，问：垂直方向的等效刚度是多少？ 课同上

按照受力分析
k 对应 x
k_2 对应 $x\cos\beta$

$kx=k_2x\cos\beta$ $\cos\beta$ ∴

∴ $k_2=$ ~~$\frac{x}{\cos}$~~ k ∴

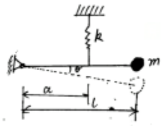
与其弹同

∴ $3k$ ∴

↓x 也 $\frac{x}{\cos\beta}$

$\frac{x}{\cos\beta}\cos\beta k$ F↗ $\frac{x}{\cos\beta}k$
$=xk$
∴

如右图所示，平衡时处在水平位置，除球外，质量均不计，不计摩擦。杆长l，球重m，弹簧节点距离转轴为a，求系统的固有频率。 解同上



$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}m'v^2$

$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{1}{2}m'v^2$

$m'=\frac{ml^2}{a^2}$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m'}}=\sqrt{\frac{k\,a^2}{m\,l^2}}$

$ml^2\ddot{\theta}=-k\theta a\cdot a$?

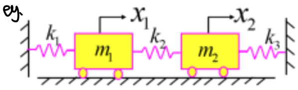
机械振动二自由度

2023年2月2日 12:53

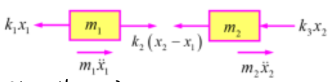
自由度判断方法 各质量块独立坐标数之和。

无阻尼二自由度自由振动系统

eg.



受力分析：



(假设 $x_2>x_1$)

由牛顿第二定律得

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)-k_3x_2$$

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0\\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2=0\end{aligned}\right\}\text{自由振动微分方程}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2\\-k_2&k_2+k_3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

质量矩阵

$$[M]=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{bmatrix}$$

刚度矩阵

$$[K]=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2\\-k_2&k_2+k_3\end{bmatrix}$$

矩阵形式的运动微分方程

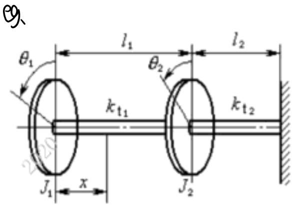
$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

位移向量 $\{x\}=\{x_1\quad x_2\}^T$

速度向量 $\{\dot{x}\}=\{\dot{x}_1\quad \dot{x}_2\}^T$

加速度向量 $\{\ddot{x}\}=\{\ddot{x}_1\quad \ddot{x}_2\}^T$

eg.

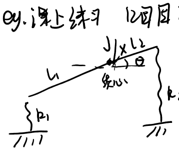


$$J_1\ddot{\theta}_1=-k_1(\theta_1-\theta_2)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2=k_1(\theta_1-\theta_2)-k_2\theta_2$$

$$\therefore\begin{bmatrix}J_1&0\\0&J_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\\ddot{\theta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1&-k_1\\-k_1&k_1+k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{bmatrix}=0$$

eg.课上练习 12周周2第6节



列微分方程

小θ时 $\sin\theta\approx\theta$

转动：$J\ddot{\theta}=k_2l_2(x-l_2\theta)-k_1l_1(x+l_1\theta)$

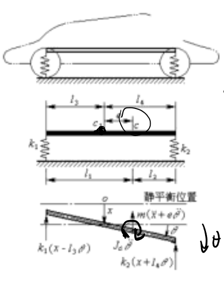
平动：$m\ddot{x}=k_2(x-l_2\theta)-k_1(x+l_1\theta)$

eg.P212 13周1第3节

汽车车体的振动

系统简化成二自由度系统，即一根刚性杆（车体的简化模型）支承在两个弹簧（悬挂弹簧和轮胎的模型）上，刚性杆作跟随其质心(c处)的上下垂直振动和绕刚性杆质心轴的俯仰运动。

以钢杆c₁点垂直位移和转角为广义坐标，可以得到如下动力学方程



↓θ正

TODO再写一次 思考

例题评见 P248

以c₁列方程

$$\begin{cases}m\ddot{x}=-k_1(x-l_3\theta)-k_2(x+l_4\theta)-me\ddot{\theta}\\(J+me^2)\ddot{\theta}=-k_2l_4(x+l_4\theta)+k_1l_3(x-l_3\theta)-me\ddot{x}\end{cases}$$

TODO 理解这两项

平行轴定理

$$\begin{cases}me\ddot{\theta}+m\ddot{x}+(k_1+k_2)x+(l_4k_2-l_3k_1)\theta=0\\ \therefore (J+me^2)\ddot{\theta}+(k_2l_4-k_1l_3)x+(k_2l_4^2+k_1l_3^2)\theta=0\end{cases}$$

老师以C列方程

$x_c=x+e\theta$

$l_1=l_3+e\theta$

$l_2=l_4-e\theta$

$m\ddot{x}_c=-k_1(x_c-l_1\theta)-k_2(x_c+l_2\theta)$

!!!思考失败 不知道怎么推过来的

$(J+me^2)\ddot\theta = -k_2 l_4(x+l_4\theta) + k_1 l_3(x-l_3\theta) - me\ddot x$ 平行轴定理

$$\begin{cases} me\ddot\theta + m\ddot x + (k_1+k_2)x + (l_4k_2 - l_3k_1)\theta = 0 \\ me\ddot x + \underbrace{(J+me^2)}_{J_{c1}}\ddot\theta + (k_2l_4 - k_1l_3)x + (k_2l_4^2 + k_1l_3^2)\theta = 0 \end{cases}$$

$m\ddot x_c = \ldots$

…思考处改 不知道怎么加进去的

整理后得

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_{c1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot x \\ \ddot\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2l_4-k_1l_3 \\ k_2l_4-k_1l_3 & k_2l_4^2+k_1l_3^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

静力耦合和动力耦合

一般情况下两自由度系统无阻尼自由振动微分方程组为

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

每个方程式中往往都有耦合项

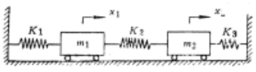
$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot x_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot x_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

座标之间的耦合称为静力耦合或弹性耦合

加速度之间的耦合称为动力耦合或惯性耦合

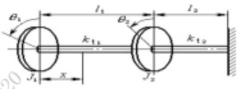
➢ 双质量弹簧系统的自由振动

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot x_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot x_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$



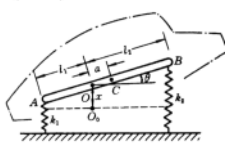
➢ 双盘转子的扭振

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot\theta_1 + k_{t1}\theta_1 - k_{t1}\theta_2 = 0 \\ J_2\ddot\theta_2 - k_{t1}\theta_1 + (k_{t1}+k_{t2})\theta_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$



➢ 汽车车体的平面振动

广义坐标：车体随参考点O的（上下）平动x和车体在平面内绕O点的转动 θ



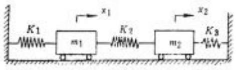
$$(J+ma^2)\ddot\theta + ma\cdot\ddot x + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\theta + (k_2l_2 - k_1l_1)x = 0$$

$$ma\ddot\theta + m\ddot x + (k_2l_2 - k_1l_1)\theta + (k_1+k_2)x = 0$$

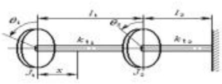
振动方程的矩阵形式 $M\ddot q + Kq = 0$

质量矩阵 $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ 刚度矩阵 $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$ $q = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$

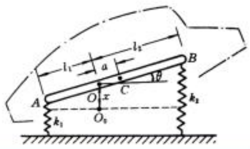


$M = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} k_{t1} & -k_{t1} \\ -k_{t1} & k_{t1}+k_{t2} \end{bmatrix}$ $q = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$



$M = \begin{pmatrix} J+ma^2 & ma \\ ma & m \end{pmatrix}$ $q = \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix}$

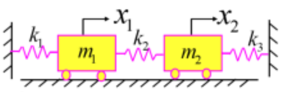
$K = \begin{pmatrix} k_1l_1^2+k_2l_2^2 & k_2l_2-k_1l_1 \\ k_2l_2-k_1l_1 & k_1+k_2 \end{pmatrix}$



固有频率和主振型

$x_2 > x_1$ TODO 自己推一次

$$[M]\{\ddot x\} + [K]\{x\} = \{0\}$$



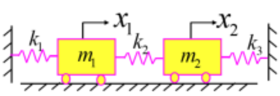
设两个质量按同样频率和相位角作简谐振动：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\sin(\omega_n t+\varphi) \\ x_2 &= A_2\sin(\omega_n t+\varphi) \end{aligned}\right\}$$ 同

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega_n t+\varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot x_1 &= -\omega_n^2A_1\sin(\omega_n t+\varphi) \\ \ddot x_2 &= -\omega_n^2A_2\sin(\omega_n t+\varphi) \end{aligned}\right\}$$

$$\{\ddot x\} = \begin{Bmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\omega_n^2\sin(\omega_n t+\varphi)$$



$$\left(-\omega_n^2[M]\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} + [K]\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\right)\sin(\omega_n t+\varphi) = \{0\}$$

$$([K]-\omega_n^2[M])\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega_n t+\varphi) = \{0\}$$

$$\begin{vmatrix} k_{11}-m_{11}\omega_n^2 & k_{12}-m_{12}\omega_n^2 \\ k_{21}-m_{21}\omega_n^2 & k_{22}-m_{22}\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

对任意时间t上式均成立，可知：

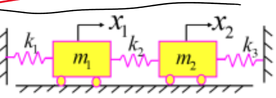
$$([K]-\omega_n^2[M])\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

已知： $[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{|[K]-\omega_n^2[M]| = 0}$$

$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} k_{11}-m_{11}\omega_n^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-m_{22}\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$



$$m_{11}m_{22}\omega_n^4 - (m_{11}k_{22}+m_{22}k_{11})\omega_n^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

它的两个正实根即为系统的固有频率

$$\omega_{n1,2} = \sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$a = m_{11}m_{22}$

$b = -(m_{11}k_{22}+m_{22}k_{11})$

$c = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ $k_{12}k_{21}$

ω_{n1} ：第一阶固有频率，简称基频。

ω_{n2} ：第二阶固有频率

$$\begin{cases} m_1\ddot x_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) \\ m_2\ddot x_2 = -k_2(x_2-x_1) - k_3x_2 \end{cases}$$

$[K] = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$

$\because [M]\{\ddot x\} + [K]\{x\} = \{0\}$

$\therefore \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega_n t+\varphi)$

$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega_n t+\varphi)$

$\begin{Bmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{Bmatrix} = -\omega_n^2\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega_n t+\varphi)$

$\underbrace{([M](-\omega_n^2) + [K])}_{0}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega_n t+\varphi) = \{0\}$

这里认为 $m_{12}=m_{21}=0$

且 $k_{12}=k_{21}$

$\therefore |[K]-\omega_n^2[M]| = 0$ 即 $\begin{vmatrix} k_1+k_2-\omega_n^2m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\omega_n^2m_2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega_n^2m_1 & k_{12}-\cancel{\omega_n^2m_{12}} \\ k_{21}-\cancel{\omega_n^2m_{21}} & k_{22}-\omega_n^2m_2 \end{vmatrix} = 0$

$(k_1+k_2-\omega_n^2m_1)(k_2+k_3-\omega_n^2m_2) - k_2^2 = 0$

$(k_1+k_2)(k_2+k_3) - (k_1+k_2)m_2\omega_n^2 - (k_2+k_3)m_1\omega_n^2 + \omega_n^4m_1m_2 = k_2^2$

$\underbrace{k_1k_3+(k_1+k_3)k_2}_{c} - \underbrace{((k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1)}_{b}\omega_n^2 + \underbrace{m_1m_2}_{a}\omega_n^4 = 0$

$(k_{11}-\omega_n^2m_{11})(k_{22}-\omega_n^2m_{22}) = (k_{21}-\cancel{\omega_n^2m_{21}})(k_{12}-\cancel{\omega_n^2m_{12}})$

$\underbrace{m_{11}m_{22}}_{a}\omega_n^4 - \underbrace{(k_{11}m_{22}+k_{22}m_{11})}_{b}\omega_n^2 + \underbrace{k_{11}k_{22}-k_{21}k_{12}}_{c} = 0$

$\therefore \omega_{n1,2} = \sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$k_{12}\ k_{21}$

ω_{n1} ：第一阶固有频率，简称基频。

ω_{n2} ：第二阶固有频率

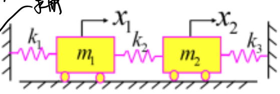
主振型（固有振型）的求解

$$\begin{cases}(k_{11}-m_{11}\omega_n^2)A_1+(k_{12}-m_{12}\omega_n^2)A_2=0\\(k_{21}-m_{21}\omega_n^2)A_1+(k_{22}-m_{22}\omega_n^2)A_2=0\end{cases}$$

存在齐次特征矩阵方程：

$$\left([K]-\omega_n^2[M]\right)\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\end{Bmatrix}=\{0\}$$

求解

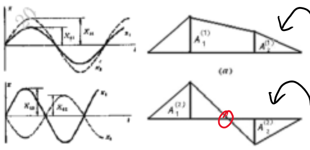


仅能求解振幅比值：

一阶振动 质量块2

$$\mu_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{k_{11}-m_{11}\omega_{n1}^2}{-k_{12}}=\frac{-k_{21}}{k_{22}-m_{22}\omega_{n1}^2}>0$$

$$\mu_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{k_{11}-m_{11}\omega_{n2}^2}{-k_{12}}=\frac{-k_{21}}{k_{22}-m_{22}\omega_{n2}^2}<0$$



第一阶主振型

第二阶主振型

式中：$A_1^{(1)}$、$A_2^{(1)}$——频率 ω_{n1} 时，质量块 m_1、m_2 的振幅；
$A_1^{(2)}$、$A_2^{(2)}$——频率 ω_{n2} 时，质量块 m_1、m_2 的振幅。

第二阶主振型存在节点

$$\begin{cases}(k_{11}-m_{11}\omega_n^2)A_1+k_{12}A_2=0\\k_{21}A_1+(k_{22}-m_{22}\omega_n^2)A_2=0\end{cases}$$

$$\therefore \mu_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{-k_{12}}{k_{11}-m_{11}\omega_{n1}^2}=\frac{k_{22}-m_{22}\omega_{n1}^2}{-k_{21}}>0$$

$$\mu_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{-k_{12}}{k_{11}-m_{11}\omega_{n2}^2}=\frac{k_{22}-m_{22}\omega_{n2}^2}{-k_{21}}<0$$

系统以某一阶固有频率按其相应的主振型作振动，称为系统的主振动

第一主振动
$$\left.\begin{aligned}x_1^{(1)}&=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)\\x_2^{(1)}&=A_2^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)\end{aligned}\right\}\quad \{x\}_1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}_1=A_1\begin{Bmatrix}1\\\mu_1\end{Bmatrix}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)$$

第二主振动
$$\left.\begin{aligned}x_1^{(2)}&=A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\\x_2^{(2)}&=A_2^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\end{aligned}\right\}\quad \{x\}_2=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}_2=A_2\begin{Bmatrix}1\\\mu_2\end{Bmatrix}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$$

虽然振幅大小与初始条件有关，但当系统按任一固有频率振动时，振幅比即和固有频率一样只决定于系统本身的物理性质。

两个质量任一瞬时的位移的比值也同样是确定的，并且等于振幅比

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A_1\sin(\omega_n t+\varphi)\\x_2&=A_2\sin(\omega_n t+\varphi)\end{aligned}\right\}$$

这表明，在第一主振动中，质量 m_1 与 m_2 沿同一方向运动；在第二主振动中 m_1、m_2 的运动方向则是相反的。系统作主振动时，各点同时经过平衡位置，同时到达最远位置，以与固有频率对应的主振型作简谐振动。

初始条件与系统响应

第一主振动
$$\left.\begin{aligned}x_1^{(1)}&=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)\\x_2^{(1)}&=A_2^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)\end{aligned}\right\}$$

2个主振型，则有2个 ω_n

第二主振动
$$\left.\begin{aligned}x_1^{(2)}&=A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\\x_2^{(2)}&=A_2^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\end{aligned}\right\}$$

系统自由振动一般表达式即方程的通解：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x_1^{(1)}+x_1^{(2)}\\x_2&=x_2^{(1)}+x_2^{(2)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x_1&=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\\x_2&=A_2^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_2^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\end{aligned}$$

系统自由振动一般表达式即方程的通解：

$$x_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\quad ①$$
$$x_2=\mu_1A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\mu_2A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)\quad ②$$

$$\Rightarrow\quad \dot{x}_1=\omega_{n1}A_1^{(1)}\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\omega_{n2}A_1^{(2)}\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2)\quad ③$$
$$\dot{x}_2=\omega_{n1}\mu_1A_1^{(1)}\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\omega_{n2}\mu_2A_1^{(2)}\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2)\quad ④$$

设定：当t=0时，$x_1(0)=x_{10}$，$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_{10}$，$x_2(0)=x_{20}$，$\dot{x}_2(0)=\dot{x}_{20}$

$$\Rightarrow\quad x_{10}=A_1^{(1)}\sin\varphi_1+A_1^{(2)}\sin\varphi_2$$
$$x_{20}=\mu_1A_1^{(1)}\sin\varphi_1+\mu_2A_1^{(2)}\sin\varphi_2$$

$\times\mu_1$ ）相减

$$\dot{x}_{10}=\omega_{n1}A_1^{(1)}\cos\varphi_1+\omega_{n2}A_1^{(2)}\cos\varphi_2$$
$$\dot{x}_{20}=\omega_{n1}\mu_1A_1^{(1)}\cos\varphi_1+\omega_{n2}\mu_2A_1^{(2)}\cos\varphi_2$$

要么会算，要么会记

求解振幅和相位：

φ_1 代 μ_2

$$\left.\begin{aligned}A_1^{(1)}&=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_2x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_{n1}}\right)^2}\\A_1^{(2)}&=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_1x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_1\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_{n2}}\right)^2}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\arctan\frac{\omega_{n1}(\mu_2x_{10}-x_{20})}{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}\\\varphi_2&=\arctan\frac{\omega_{n2}(\mu_1x_{10}-x_{20})}{\mu_1\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}\end{aligned}\right\}\ \frac{①}{②}$$

系统自由振动一般表达式即方程的通解：
$$\omega_{n1,2}=\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$x_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$$
$$x_2=\mu_1A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\mu_2A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$$

$a=m_{11}m_{22}$
$b=-(m_{11}k_{22}+m_{22}k_{11})$
$c=k_{11}k_{22}-k_{12}^2$

若 $A_1^{(2)}=0$ ，系统便作第一阶主振动，两质量块同向振动

若 $A_1^{(1)}=0$ ，系统便作第二阶主振动，两质量块反向振动

eg. P218

例：对于图示系统，设：$m=m\ m=2m\ k=k=k\ k=2k$

若 $A_1^{(2)}=0$ ，系统便作第一阶主振动，两质量块同向振动

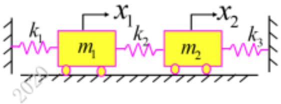
若 $A_1^{(1)}=0$ ，系统便作第二阶主振动，两质量块反向振动

eg. P218

例：对于图示系统，设：$m_1=m, m_2=2m, k_1=k_2=k, k_3=2k$

(1)试求系统的固有频率和主振型。

解：



$$\omega_{n1,2}=\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

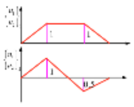
$a=m_{11}m_{22}$ $\quad$ $a=2m^2 \quad b=-7mk \quad c=5k^2$ $\quad$ $\omega_{n1}=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$b=-(m_{11}k_{22}+m_{22}k_{11})$

$c=k_{11}k_{22}-k_{12}^2$ $\quad$ $\omega_{n1,2}=\frac{7mk\mp\sqrt{49m^2k^2-4\times2m^2\times5k^2}}{2\times2m^2}$ $\quad$ $\omega_{n2}=\sqrt{\frac{5k}{2m}}$

$$\mu_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{k_{11}-m_{11}\omega_{n1}^2}{-k_{12}}=\frac{-k_{21}}{k_{22}-m_{22}\omega_{n1}^2}=1$$

$$\mu_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{k_{11}-m_{11}\omega_{n2}^2}{-k_{12}}=\frac{-k_{21}}{k_{22}-m_{22}\omega_{n2}^2}=-0.5$$

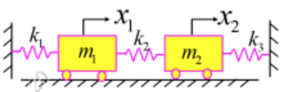


(2) 对初始条件的反应：

1) 已知初始条件为

$x_{10}=1.2 \quad x_{20}=\dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$

求系统的响应；



2) 若初始条件变为 $x_{10}=x_{20}=1 \quad \dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$ 系统的响应有何变化？

解：已知

$\omega_{n1}=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_{n2}=\sqrt{\frac{5k}{2m}} \quad \mu_1=1,\ \mu_2=-0.5$

对初始条件的响应 $\quad t=0$时，$x_1=x_{10}$，$x_2=x_{20}$，$\dot{x}_1=\dot{x}_{10}$，$\dot{x}_2=\dot{x}_{20}$

$$x_1=x_1^{(1)}+x_1^{(2)}=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$$
$$x_2=x_2^{(1)}+x_2^{(2)}=\mu_1A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\mu_2A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$$

1） 初始条件为 $x_{10}=1.2 \quad x_{20}=\dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$

$x_{10}=A_1^{(1)}\sin\varphi_1+A_1^{(2)}\sin\varphi_2$

$0=\mu_1A_1^{(1)}\sin\varphi_1+\mu_2A_1^{(2)}\sin\varphi_2$

$0=\omega_{n1}A_1^{(1)}\cos\varphi_1+\omega_{n2}A_1^{(2)}\cos\varphi_2$

$0=\omega_{n1}\mu_1A_1^{(1)}\cos\varphi_1+\omega_{n2}\mu_2A_1^{(2)}\cos\varphi_2$

$\Rightarrow$ $A_1^{(1)}=0.4 \quad A_1^{(2)}=0.8$ $\quad \varphi_1=\frac{\pi}{2} \quad \varphi_2=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$

$$x_1=0.4\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+0.8\cos\sqrt{\frac{5k}{2m}}t \qquad x_2=0.4\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-0.4\cos\sqrt{\frac{5k}{2m}}t$$

2) 若初始条件为 $x_{10}=x_{20}=1 \quad \dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$ 系统的响应为

$$A_1^{(1)}=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_2x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_{n1}}\right)^2}$$
$$A_1^{(2)}=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_1x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_1\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_{n2}}\right)^2}$$

$$\varphi_1=\arctan\frac{\omega_{n1}(\mu_2x_{10}-x_{20})}{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}$$
$$\varphi_2=\arctan\frac{\omega_{n2}(\mu_1x_{10}-x_{20})}{\mu_1\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}$$

$\Rightarrow$ $A_1^{(1)}=1 \quad A_1^{(2)}=0 \quad \theta_1=\frac{\pi}{2} \quad \theta_2=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $x_1=\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad x_2=\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

1） 初始条件为 $x_{10}=1.2 \quad x_{20}=\dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$

系统的响应为 $x_1=0.4\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+0.8\cos\sqrt{\frac{5k}{2m}}t$

初始条件与第一阶主振型一致 $\quad x_2=0.4\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-0.4\cos\sqrt{\frac{5k}{2m}}t$

2) 若初始条件为 $x_{10}=x_{20}=1 \quad \dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$

系统的响应为 $x_1=\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ $\quad$ 为第一阶主振动

$x_2=\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

二自由度强迫振动的分析

1) 设 $x_2>x_1$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1) \\ m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)-k_3x_2 \end{cases}$$

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$$

$$[M]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+[K]\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

设 $\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\end{Bmatrix}\sin(\omega_nt+\varphi)$

$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}=-\omega_n^2\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\end{Bmatrix}\sin(\omega_nt+\varphi)$

$$([M](-\omega_n^2)+[K])\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\end{Bmatrix}\sin(\omega_nt+\varphi)=0$$

设 $m_{12}=m_{21}=0 \quad k_{12}=k_{21}$

$$\begin{vmatrix} k_{11}-m_1\omega_n^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-m_2\omega_n^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\underbrace{m_1m_2}_{a}\omega_n^4-\underbrace{(k_{11}m_2+k_{22}m_1)}_{b}\omega_n^2+\underbrace{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}_{c}=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \quad [K]=\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix}$$

$a=2m^2$

$b=-7km$

$c=\cancel{7k^2}\ 5k^2$ $\quad (-(-k)^2=k^2)$

$$\omega_{n1}=\sqrt{\frac{7km-3km}{4m^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_{n2}=\sqrt{\frac{7km+3km}{4m^2}}=\sqrt{\frac{5k}{2m}}$$

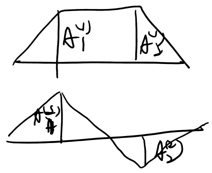
$(k_{11}-m_1\omega_n^2)A_1+k_{12}A_2=0$

$$\mu=\frac{A_2}{A_1}=\frac{k_{11}-m_1\omega_n^2}{-k_{12}}$$

代入

$$\mu_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{k_{11}-m_1\omega_{n1}^2}{-k_{12}}=1 \quad >0$$

$$\mu_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{k_{11}-m_1\omega_{n2}^2}{-k_{12}}=-0.5 \quad <0$$



2) $x_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

$x_2=A_2^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_2^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

$\quad=\mu_1A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\mu_2A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

当 $x_{10}=1.2 \quad x_{20}=0 \quad \dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$

$$A_1^{(1)}=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_2x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_n}\right)^2} \qquad \varphi_1=\arctan\frac{\mu_2x_{10}-x_{20}}{\frac{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_n}}\ (-\pi)$$

$$A_1^{(2)}=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_1x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_1\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_n}\right)^2} \qquad \varphi_2=\arctan\frac{\mu_1x_{10}-x_{20}}{\frac{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_n}}+\pi$$

记忆

$\therefore A_1^{(1)}=\frac{0.6}{1.5}=0.4 \qquad \varphi_1=-\frac{\pi}{2}$

$A_1^{(2)}=\frac{1.2}{1.5}=0.8 \qquad \varphi_2=\frac{\pi}{2}$

$\therefore x_1=0.4\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{\pi}{2})+0.8\sin(\sqrt{\frac{5k}{2m}}t+\frac{\pi}{2})$

$x_2=0.4\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{\pi}{2})-0.4\sin(\sqrt{\frac{5k}{2m}}t+\frac{\pi}{2})$

这里解答说

如何都可以

当 $x_{10}=1 \quad x_{20}=1 \quad \dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$

$A_1^{(1)}=1 \qquad \varphi_1=-\frac{\pi}{2}$

$A_1^{(2)}=0 \qquad \varphi_2=\frac{\pi}{2}$

$\therefore x_1=\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{\pi}{2})$

$x_2=\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{\pi}{2})$

模态分析法（振型叠加法）

5)-LLQ [illegible]

模态分析法：(又称振型叠加法)　　5.2.4.9，(二自由度下) 不作为考试内容 (……)

振动微分方程的耦合状况是由所选定的坐标系统来决定的，与系统的物理参数无关。

解耦只能在同一振动中 互相交叉

ω_{n1}　　ω_{n2}

T 分转　　T 分转　　← 体现了物理意义

V　　V

不能转

30%　　70%

比例一致

机械振动多自由度

2023年2月5日 20:46

影响系数法 ☆ 重点考查内容

结论：刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统**仅**在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

结论：质量矩阵M中的元素 m_{ij} 是使系统**仅**在第j个坐标上产生单位加速度而相应于第i个坐标上所需施加的力

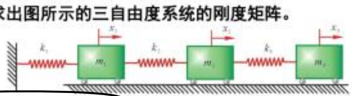
m_{ij}、k_{ij} 又分别称为质量影响系数和刚度影响系数。根据它们的物理意义可以直接写出矩阵 M 和 K，从而建立作用力方程，这种方法称为影响系数方法 。

$$P(t)=\begin{bmatrix}P_1(t)\\P_2(t)\\\vdots\\P_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}\cdots k_{1j}\cdots k_{1n}\\k_{21}\cdots k_{2j}\cdots k_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\\k_{n1}\cdots k_{nj}\cdots k_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{nj}\end{bmatrix}$$

$$P(t)=\begin{bmatrix}P_1(t)\\P_2(t)\\\vdots\\P_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{11}\cdots m_{1j}\cdots m_{1n}\\m_{21}\cdots m_{2j}\cdots m_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\\m_{n1}\cdots m_{nj}\cdots m_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{1j}\\m_{2j}\\\vdots\\m_{nj}\end{bmatrix}$$

eg P303

现分析求出图所示的三自由度系统的刚度矩阵。

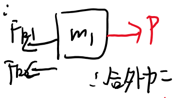


令 $x_1=1\quad x_2=0\quad x_3=0$

$$\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\\cdots&&\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\\cdots\end{bmatrix}$$

为保持平衡需要提供的力（假想）

eg：



∴合外力 $=-k_1-k_2$

我需要提供 k_1+k_2 使其平衡

∴ $k_{11}=k_1+k_2$

第一列

$$\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2&0\\-k_2&k_2+k_3&-k_3\\0&-k_3&k_3\end{bmatrix}=K$$

刚度矩阵一般是对称的。

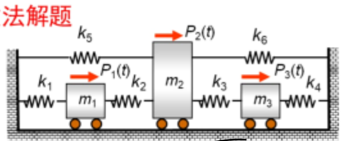
实际上任何多自由度线性系统都具有这个性质。即

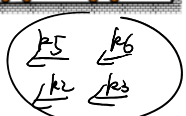
$$K=K^T$$

eg 南 P23

利用刚度、质量影响系数法解题

例：写出 M、K 及运动微分方程





再受一下（找移动后其他的P）

先只考虑静态

$X=[1\,0\,0]^T\qquad X=[0\,1\,0]^T\qquad X=[0\,0\,1]^T$

$$K=\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2&0\\-k_2&k_2+k_3+k_5+k_6&-k_3\\0&-k_3&k_3+k_4\end{bmatrix}$$

只考虑动态

考题需自己这个描述

各个弹簧有没有变形呢……∴只需提供一下就OK

令 $\ddot{X}=[1\quad 0\quad 0]^T$　有：$m_{11}=m_1\qquad m_{21}=0\qquad m_{31}=0$

令 $\ddot{X}=[0\quad 1\quad 0]^T$　有：$m_{12}=0\qquad m_{22}=m_2\qquad m_{32}=0$

令 $\ddot{X}=[0\quad 0\quad 1]^T$　有：$m_{13}=0\qquad m_{23}=0\qquad m_{33}=m_3$

质量矩阵：$M=\begin{bmatrix}m_1&0&0\\0&m_2&0\\0&0&m_3\end{bmatrix}$

推荐用

质量矩阵：$M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$

$$M\ddot{X}+KX=P(t)$$

那：

耦合项

1、2之间的连接弹簧

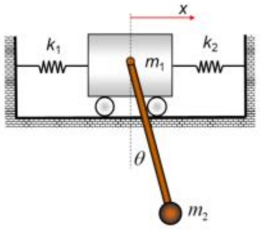
m_1外部连的弹簧

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_5+k_6 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix}$$

eg、西P26 106分钟

例：两自由度系统

摆长 l，无质量，微摆动



求：运动微分方程

TODO看不懂

$[M]\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+[K]\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

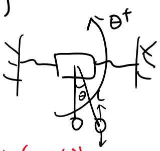
考虑静态 (K)

令x=1 θ=0　　令x=0 θ=1

力 k_1+k_2　　0

力矩 0　　m_2gl

是重力矩啦(乘力臂)

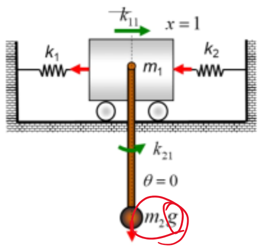


考虑动态.

令$\ddot{x}=1$ $\ddot{\theta}=0$　　令$\ddot{x}=0$ $\ddot{\theta}=1$

$\begin{bmatrix} m_1+m_2 \\ m_2 l \end{bmatrix}$

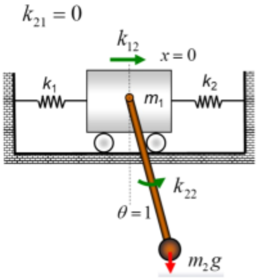
解： 先求解刚度矩阵



令：$x=1 \quad \theta=0$

$k_{11}=(k_1+k_2)\times 1=k_1+k_2$

$k_{21}=0$



令：$x=0 \quad \theta=1$

$k_{12}=(k_1+k_2)\times 0=0$

$k_{22}=m_2g\times l\sin\theta\approx m_2gl$

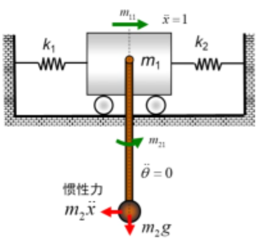
求解质量矩阵

令：$\ddot{x}=1 \quad \ddot{\theta}=0$

2.why?

$m_{11}=(m_1+m_2)\times\ddot{x}=m_1+m_2$

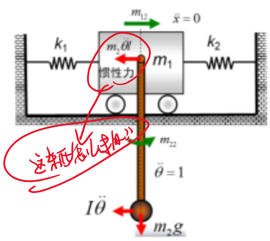
$m_{21}=(m_2\ddot{x})\times l=m_2l$



F=ma

F-ma=0

-ma为惯性力



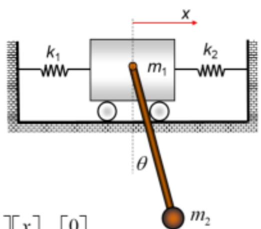
令：$\ddot{x}=0 \quad \ddot{\theta}=1$

$m_{12}=m_2\ddot{\theta}l=m_2l$

$m_{22}=I\ddot{\theta}=m_2l^2\times\ddot{\theta}=m_2l^2$

质量矩阵：$M=\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2l \\ m_2l & m_2l^2 \end{bmatrix}$

刚度矩阵：$K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & m_2gl \end{bmatrix}$



运动微分方程：

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2l \\ m_2l & m_2l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & m_2gl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

柔度影响系数法——位移方程和柔度矩阵

对于静定结构，有时通过柔度矩阵建立位移方程比通过刚度矩阵建立作用力方程来得更方便些。

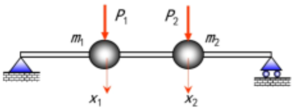
柔度定义为弹性体在单位力作用下产生的变形

物理意义及量纲与刚度恰好相反

eg 以一个例子说明位移方程的建立

无质量弹性梁，有若干集中质量

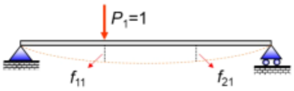
（质量连续分布的弹性梁的简化 ）

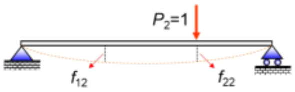


假设 P_1、P_2 是常力 以准静态方式作用在梁上

梁只产生位移（即挠度），不产生加速度

取质量 m_1、m_2 的静平衡位置为坐标 x_1、x_2 的原点





（1）$P_1=1$、$P_2=0$ 时

m_1 位移：$x_1=f_{11}$

m_2 位移：$x_2=f_{21}$

（2）$P_1=0$、$P_2=1$ 时

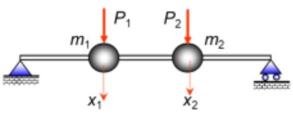
m_1 位移：$x_1=f_{12}$

m_2 位移：$x_2=f_{22}$

（3）P_1、P_2 同时作用

m_1 位移：$x_1=f_{11}P_1+f_{12}P_2$

m_2 位移：$x_2=f_{21}P_1+f_{22}P_2$



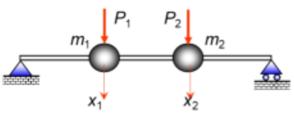
矩阵形式： $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{FP}$

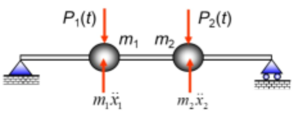
f_{ij} 柔度影响系数

其中：$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$ 柔度矩阵

物理意义：
系统仅在第 j 个坐标受到单位力作用时相应于第 i 个坐标上产生的位移





$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{FP}$

$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$

当 P_1、P_2 是动载荷时

集中质量上有惯性力存在

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1(t)-m_1\ddot{x}_1\\P_2(t)-m_2\ddot{x}_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}P_1(t)\\P_2(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{bmatrix}\right)$$

位移方程 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}})$

位移方程：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}})$

又可： $\boldsymbol{FM}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{FP}$

作用力方程： $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{KX}=\boldsymbol{P}$ ⇒ $\boldsymbol{KX}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}$

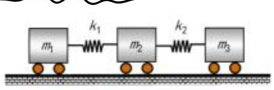
若K非奇异 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}})$

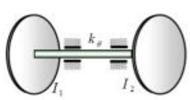
柔度矩阵与刚度矩阵的关系：

$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}^{-1}$ 或： $\boldsymbol{FK}=\boldsymbol{I}$

应当注意：

对于允许刚体运动产生的系统（即具有刚体自由度的系统），柔度矩阵不存在





原因：在任意一个坐标上施加单位力，系统将产生刚体运动而无法计算各个坐标上的位移

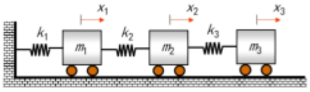
位移方程不适用于具有刚体自由度的系统

而无法计算各个坐标上的位移

位移方程不适用于具有刚体自由度的系统　　有一道例题

的刚度阵 例：求柔度阵

$$K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$



解：

刚度影响系数法需要掌握 1.2.3.2.3

固有频率的阶振型

$$\{x\}=\{X\}\sin(\omega t+\alpha) \longrightarrow \text{大X这里指A}$$

☆ 这里X就是前面A 振幅

与下文的 M 也说的是一件事

式中$\{X\}$为振幅向量，ω为固有频率，α 为初相位。

代入振动方程可得：

$$([K]-\omega^2[M])\{X\}=\{0\}$$

$[K]$-$\omega^2[M]$称为特征矩阵。要使上式有解，必须使其系数行列式为零：

$$\underline{\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0} \longrightarrow \text{频率方程 or 特征方程}$$

上式称为频率方程或特征方程。由此可求出n个特征根ω^2。

$$0<\omega_1^2\le\omega_2^2\le\cdots\le\omega_n^2$$

ω_i：第 i 阶固有频率　　ω_1：基频。

$$\begin{array}{cccc} & \omega_{n1} & \omega_{n2} & \omega_{n3} \\ \text{这个振幅比} & \begin{Bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} A_1^{(3)} \\ A_2^{(3)} \\ A_3^{(3)} \end{Bmatrix} \end{array}$$

将每个特征根ω_i（固有频率）代入$([K]-\omega^2[M])\{X\}=\{0\}$，可得到相应的非零向量$\{X^{(i)}\}$，称为特征矢量，或称特征向量、固有振型、固有向量、模态向量等。显然：

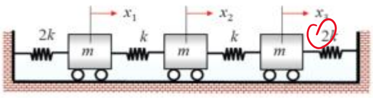
$$([K]-\omega_i^2[M])\{X^{(i)}\}=\{0\},\ (i=1,2\ldots n)$$

i 振型就是 M $\begin{Bmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu \end{Bmatrix}$

和两自由度一样，由上式只能求出振幅的比值，而不能确定各振幅大小。

固有频率和固有振型只决定于系统本身的物理特性，而与外部激励和初始条件无关，它们都是系统的固有属性。

【题】：图示的三自由度系统，试计算系统的固有频率和固有振型。



$M=\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{bmatrix}$ $K=\begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}$

$M\ddot{X}+KX=0$ $X=A\sin(\omega t+\varphi)$
$\ddot{X}=-\omega_n^2 A\sin(\omega t+\varphi)$

$\therefore (K-\omega_n^2 M)A=0$

$\therefore |K-\omega_n^2 M|=0$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$1(59-68)-4(29-38)+7(26-35)$

解 系统的运动方程为：

$$M\ddot{u}(t)+Ku(t)=0$$

其中：

$$M=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \qquad K=\begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}$$

广义特征值问题：

$$\left(\begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$(3k-m\omega^2)(2k-m\omega^2)(3k-m\omega^2)-k^2(3k-m\omega^2)-k^2(3k-m\omega^2)=0$

同除 k^3

$(3-\frac{m\omega^2}{k})(2-\frac{m\omega^2}{k})(3-\frac{m\omega^2}{k})-(6-2\frac{m\omega^2}{k})=0$

令 $t=\frac{m\omega^2}{k}$

$t^3-8t^2+19t-12=0$

$(t-1)(t^2-7t+12)=0$

$(t-1)(t-3)(t-4)=0$

$\therefore \omega_{n1}=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_{n2}=\sqrt{\frac{3k}{m}}$ $\omega_{n3}=\sqrt{\frac{4k}{m}}$

特征方程：

$$\begin{vmatrix} 3k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 3k-m\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$(\omega^2)^3-8\left(\frac{k}{m}\right)(\omega^2)^2+19\left(\frac{k}{m}\right)^2\omega^2-12\left(\frac{k}{m}\right)^3=0$$

固有频率：

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}},\quad \omega_3=2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$(K-\omega_n^2 M)A=0$

当 $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 时，令 $A_1^{(1)}=1$ 则 $A_2=2$ $A_3=1$

… $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ $A_1^{(2)}=1$ $A_2=0$ $A_3=1$

$\sqrt{\frac{4k}{m}}$ $A_1^{(3)}=1$ $A_2=-1$ $A_3=1$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$

$K=\begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}$

$(3k-m\omega^2)A_1+(-k)A_2=0$

$(-k)A_2+(3k-m\omega^2)A_3=0$

$A_2=\frac{3k-m\omega^2}{k}A_1$

$A_3=\frac{k}{3k-m\omega^2}A_2=A_1$

$$\left(\begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Longleftarrow \omega=\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{bmatrix} 3k-k & -k & 0 \\ -k & 2k-k & -k \\ 0 & -k & 3k-k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_1^{(1)} \\ \varphi_2^{(1)} \\ \varphi_3^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{Bmatrix} 2k\varphi_1^{(1)}-k\varphi_2^{(1)}=0 \\ -k\varphi_1^{(1)}+k\varphi_2^{(1)}-k\varphi_3^{(1)}=0 \\ -k\varphi_2^{(1)}+2k\varphi_3^{(1)}=0 \end{Bmatrix}$$

不给特征值时则由你自己决定

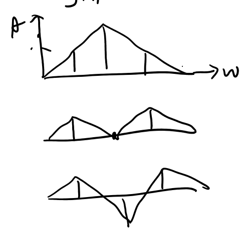
令：$\varphi_1^{(1)}=1$，则 $2k-k\varphi_2^{(1)}=0 \Rightarrow \varphi_2^{(1)}=2$

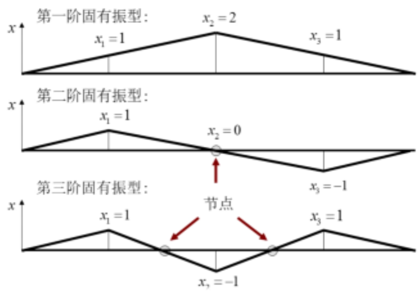
这样给定值要 1-多阶（比）

$-k+2k-k\varphi_3^{(1)}=0 \Rightarrow \varphi_3^{(1)}=1$

同理，将ω_2代入到特征值问题的方程中，解方程得到 $\varphi_1^{(2)}=1$ $\varphi_2^{(2)}=0$ $\varphi_3^{(2)}=-1$

同理，将ω_3代入到特征值问题的方程中，解方程得到 $\varphi_1^{(3)}=1$ $\varphi_2^{(3)}=-1$ $\varphi_3^{(3)}=1$





$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\varphi^{(1)}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$ $\varphi^{(2)}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

$\omega_3=2\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\varphi^{(3)}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

例题的课程熟记 79:20

一、矩阵迭代法

刚度矩阵方程 $[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$ （3-9）

柔度矩阵方程 $[a][M]\{\ddot{x}\}+\{x\}=\{0\}$ （3-10）

迭代 低阶（基频） 迭代 高阶

$\{x\}+[A]\{\ddot{x}\}=\{0\}$ $[A]$—动力矩阵，$[A]=[a][M]$

柔度矩阵 刚度矩阵 $=[K^{-1}]$

$M\ddot{X}+KX=0$

$K^{-1}M\ddot{X}+X=0$

解：$X=A\sin\omega t$ $\ddot{X}=\cdots$
所不变 M

$(I-K^{-1}M\omega_n^2)A\sin\omega t=\{0\}$
那不变 A
A 不变 M
$K^{-1}M$ 不变 A

$(I-K^{-1}M\omega_n^2)A\sin\omega t=\{0\}$

$\frac{1}{\omega_n^2}$：$M=K^{-1}M\cancel{\omega_n^2}M$

需要掌握 91:44

例3．求图3-2所示系统的一阶固有频率。假定 $m_1=m_2=m_3=m$

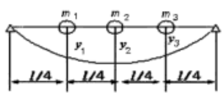


图3-2

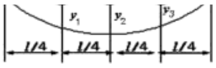


图3-2

解：已知系统的柔度矩阵为

$$[a]=\begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix}\frac{l^3}{768EJ} \quad [A]=[a][M]=\begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix}q$$

$$[M]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}m \qquad q=\frac{ml^3}{768EJ}$$

根据图（3-2）所示系统的变位情况，可大致假设一个初始振型

$$\{\mu\}_0=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}$$

这里需要说明的是，虽然$\{\mu\}_0$是可以任意假定的，但是所假定的振型愈接近于系统的实际振型，则迭代收敛愈快，计算过程愈简短。这是在假定初始振型时所应当考虑的。

将$\{\mu\}_0$代入迭代式，得

$$\{B\}_1=[A]\{\mu\}_0=\begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}q=\begin{Bmatrix}38\\54\\38\end{Bmatrix}q=\underbrace{38q}_{\text{前系数项}}\underbrace{\begin{Bmatrix}1\\1.42\\1\end{Bmatrix}}_{\text{往回代入}}$$

归一化）

再以 $\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}1\\1.42\\1\end{Bmatrix}$ 取代$\{\mu\}_0$代入迭代式，得

$$\{B\}_2=[A]\{\mu\}_1=\begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1.42\\1\end{Bmatrix}q=\begin{Bmatrix}31.62\\44.72\\31.62\end{Bmatrix}q=31.62q\begin{Bmatrix}1\\1.4143\\1\end{Bmatrix}$$

略去

再以 $\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\1.4143\\1\end{Bmatrix}$ 取代$\{\mu\}_1$代入迭代式

$$\{B\}_3=[A]\{\mu\}_2=\begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1.4143\\1\end{Bmatrix}q=\begin{Bmatrix}31.55\\44.63\\31.55\end{Bmatrix}q=31.55q\begin{Bmatrix}1\\1.4145\\1\end{Bmatrix}$$

因 $\{\mu\}_3=\begin{Bmatrix}1\\1.4145\\1\end{Bmatrix}\approx\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\1.4143\\1\end{Bmatrix}$

可以认为迭代过程已经收敛！（如需要更高的计算精度，还可以继续上述迭代过程。）这样，

$$\frac{1}{\omega_n^2}\{\mu\}=31.55q\begin{Bmatrix}1\\1.4145\\1\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}=31.55q=31.55\frac{ml^3}{768EI}$$

故 $\omega_{n1}=\sqrt{\dfrac{768EI}{31.55ml^3}}=4.934\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$

$$\mu_1=\begin{Bmatrix}1\\1.4145\\1\end{Bmatrix}$$

$\frac{1}{w_n^2}\{M\}=K^{-1}M\{M\}$

$$\boxed{\begin{aligned}\{B\}_n&:=[A]\{M\}_{n-1}\\ \{B\}_n&=\frac{1}{W^2}\underbrace{\{M\}_n}_{\text{首项归一化)}}\end{aligned}}$$

迭代式

$$[A]=\begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix}q$$

$m\ddot{x}+Kx=0$

$(-K^{-1}Mw_i^2+1)M=0$

$M=w^2K^{-1}MM$

$\frac{1}{w^2}M=\underbrace{K^{-1}M}_{A}M$

设 $M_0=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}$

9 22 7

$$A\,M_0=A\times\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}38\\54\\38\end{Bmatrix}q=\underbrace{38q}_{\frac{1}{W^2}}\underbrace{\begin{Bmatrix}1\\1.42\\1\end{Bmatrix}}_{M_1}$$

$$A\,M_1=A\times\begin{Bmatrix}1\\1.42\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}31.62\\44.72\\31.62\end{Bmatrix}q=31.62q\begin{Bmatrix}1\\1.414\\1\end{Bmatrix}$$

M_2

∴一主振型：（基频 w_n 最小）

$M_1=\begin{Bmatrix}1\\1.414\\1\end{Bmatrix}$ $\quad \frac{1}{w_n^2}=31.62q$

$\therefore w_{n1}=\sqrt{\frac{1}{31.62q}}=\sqrt{\frac{768EI}{31.62\,ml^3}}$

二、瑞利（Rayleigh）法

当梁振动至极限位置，达到其振幅值y_1，y_2和y_3时，由于梁的弯曲而储存于系统中的变形势能为

$$U_{max}=\frac{1}{2}(m_1gy_1+m_2gy_2+m_3gy_3)$$

当梁回复到平衡位置时，系统的动能为

$$T_{max}=\frac{1}{2}(m_1\dot{y}_1^2+m_2\dot{y}_2^2+m_3\dot{y}_3^2)$$

$$T_{max}=\frac{\omega_n^2}{2}(m_1y_1^2+m_2y_2^2+m_3y_3^2)$$

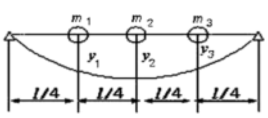


图3-2

$$\omega_{n1}^2=\frac{(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3)g}{(m_1y_1^2+m_2y_2^2+m_3y_3^2)}$$

$$\omega_{n1}^2=\frac{g\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i{y_i}^2}$$

位移

这样，只要知道各集中质量$m_1,m_2,\cdots\cdots,m_n$，并按材料力学方法求得有关各点的静挠度$y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$，代入式（3-21），即可求得系统的基频。

例5．用瑞利法求图3-2所示系统的基频。假定 $m_1=m_2=m_3=m$

外力P
即重力G=mg

解：前已求出系统的柔度矩阵为

$$[a]=\begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix}q$$

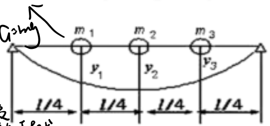


图3-2

式中，$q=\dfrac{l^3}{768EI}$

当m_1g时对y_1的位移贡献 挠度
当m_2g时对y_1的位移贡献

$$y_1=m_1ga_{11}+m_2ga_{12}+m_3ga_{13}=mg(9+11+7)q=27mgq$$

同理 $y_2=mg\left(a_{21}+a_{22}+a_{23}\right)=mg\left(11+16+11\right)q=38mgq$

$$y_3=mg(a_{31}+a_{32}+a_{33})=mg(7+11+9)q=27mgq$$

$$\omega_{n1}^2=\frac{(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3)g}{(m_1y_1^2+m_2y_2^2+m_3y_3^2)}\qquad(3\text{-}20)$$

将上述各值代入式（3-20）得

$$\omega_{n1}^2=\frac{mg\left(y_1+y_2+y_3\right)}{m\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)}=\frac{(27+38+27)mgqg}{\left(27^2+38^2+27^2\right)(mgq)^2}$$

$$=\frac{92}{2902}\cdot\frac{1}{mq}=\frac{92}{2902}\cdot\frac{768EI}{ml^3}$$

得 $\omega_{n1}=4.934\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$

这个结果与例3采用矩阵迭代法所求得的结果完全一致。这说明，把梁的静挠度曲线作为系统的一阶振型，是相当准确的。

三、邓克莱（Dunkerley）法

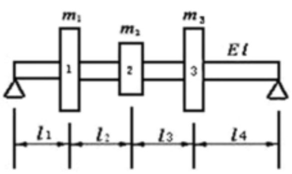


图3-5

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2}=\frac{1}{\omega_{n11}^2}+\frac{1}{\omega_{n22}^2}+\frac{1}{\omega_{n33}^2}+\cdots+\frac{1}{\omega_{nkk}^2}$$

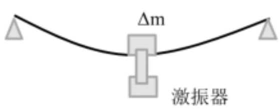
ω_{n1} ——系统的基频；

ω_{n11} ——当轴上只有圆盘1，而其余各圆盘都不存在时，这个单圆盘轴系统的固有频率；

ω_{n22}　ω_{nkk} 的意义、依此类推。

在图示系统中，已知激振器质量为m=15kg,激振后测得系统（由梁与激振器所组成）的基频为f_{n1}=30Hz。再在系统中激振器处附加一个质量为Δm=15kg的重块，再次激振，测得系统相应的基频为f_{n1}'=24Hz,求梁的基频。

⑥ 激振器时间很了



解：由邓克莱公式 $\frac{1}{\omega_{n1}^2}=\frac{1}{\omega_{n11}^2}+\frac{1}{\omega_{n22}^2}$

式中 ω_{n1}———梁与激振器组成的系统的基频；

ω_{11}———梁的基频；

ω_{22}———当忽略梁的质量时，由激振器与无质量弹性梁组成的单自由度系统的固有频率。

假定梁上固定激振器处的刚度为k_{22}，则

$$\omega_{n22}^2=\frac{k_{22}}{m}$$

在未加附加质量块Δm时，将有关参数代入邓克莱公式，得

136分钟 考试时用这种方法

$$\frac{1}{(2\pi\times30)^2}=\frac{1}{\omega_{n11}^2}+\frac{15}{k_{22}}$$

在加上附加质量块Δm后，则为

$$\frac{1}{(2\pi\times24)^2}=\frac{1}{\omega_{n11}^2}+\frac{15+15}{k_{22}}$$

由上面两式中消去k_{22}，即可求得梁的固有频率

$$\omega_{n11}=285rad/s$$

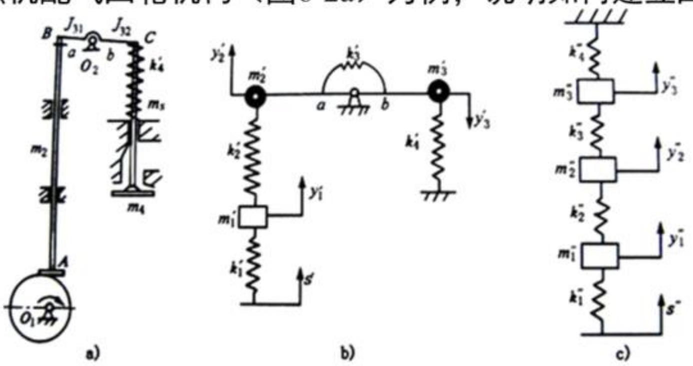
14分00 除了传递矩阵法，以上3种包括直接计算都要掌握！

机械振动数字仿真、凸轮的动力学建模、自动给料机的动力学分析

2023年2月6日　0:05

6.1.3 复杂凸轮机构的动力学模型

在工程实际中，要进行凸轮机构的弹性动力学分析，首先要建立其动力学模型。在分析过程中一般多采用集中参数模型，将弹性较大的部分用无质量弹簧来模拟，惯性较大的部分用集中质量来模拟。有的杆件本身即有弹性、又有质量，则用等效弹簧替代杆件的弹性，保持替代前后变形能不变；用等效集中质量来替代杆件的质量，保持替代前后动能不变。下面，以一个内燃机配气凸轮机构（图6-2a）为例，说明如何建立凸轮机构的动力学模型。



b→c 等效过程需要掌握

85:37

图6-2b中，k_1' ——凸轮与推杆接触表面的接触刚度；

k_2' ——推杆AB的拉伸刚度；

k_3' ——转臂BC的弯曲刚度；

k_4' ——弹簧刚度；

s' ——凸轮作用于从动件的理论位移。

再作一次坐标变换。以推杆为等效构件，将转臂右边的位移、质量、刚度折算到推杆那边去，在折算时应保持动能、势能不变。这样可得到如图6-2 c）所示之动力学模型。其中

$$\begin{cases} s''=s',\quad y_1''=y_1',\quad y_2''=y_2',\quad y_3''=\left(\dfrac{a}{b}\right)y_3' \\ k_1''=k_1',\quad k_2''=k_2',\quad k_3''=k_3',\quad k_4''=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 k_4' \\ m_1''=m_1',\quad m_2''=m_2',\quad m_3''=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 m_3' \end{cases} \tag{6-6}$$

自动给料机的门运动过快，可能碰撞、

◆振动控制的基本方法就是围绕针对产生及振动能量传输过程的三个基本环节（振源、传输途径以及受保护对象）入手，分别采取控制振源的振动、控制振动的传递以及控制机器及人员对外界振动的感受等措施来实施。由此可知，振动控制技术主要包含两大类，即隔振技术与减振技术。

8.1.1 机械设备中的典型振源及其特点

1. 旋转质量的不平衡 → 打孔破坏偏心率
2. 往复质量的不平衡 → 曲轴
3. 传动系统的缺陷或误差 → 齿轮
4. 工作载荷的波动
5. 外界环境引起的激励

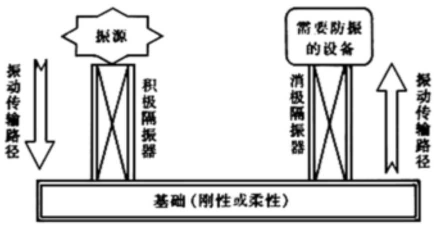
判断主要激振源的基本方法：

1. 实测设备或结构的振动信号
2. 分析其频率、幅值及时域中的特点
3. 与估算出的上述各种可能的振源的特点相比较
4. 找出起主导作用的振源

一、隔振技术
- 1.隔振原理
- 2.隔振特性
- 3.常用的隔振器

1.隔振原理

隔振就是在振源与需要防振的设备之间，安放若干个具有一定弹性和阻尼性能的隔振装置，将振源与基础之间或基础与防振设备之间的刚性连接改成柔性连接，以阻隔并减弱振动能量的传递。根据隔振目的的不同，一般将隔振分为**积极隔振**和**消极隔振**。



1）积极隔振

机器本身是振源，为了降低振源对其周围设备的影响，用隔振装置（隔振器）将其与基础隔离开来，以减小振源传递给基础的力，并使设备本身的振动减小，这种隔振方式称为积极隔振。

图中机器本身产生的激振力为$F_0e^{j\omega t}$，则系统产生的振动为$x=Ae^{j(\omega t-\psi)}$，如果没有隔振装置，设备和支撑之间为刚性接触，则传递到支承上的力为$F_0e^{j\omega t}$。当采用了隔振措施后，则通过弹簧传递到支承上的力为$F_k=kx$，通过阻尼器传递到支承上的力为$F_c = c\dot{x} = jc\omega x$

这两个力频率相同，相位差为90°。故系统作用在支承上的力为将为通过弹簧与阻尼器传递的最大载荷的矢量和。即

$$F_{\max} = \sqrt{F_{k\max}^2 + F_{c\max}^2} = \sqrt{(kA)^2 + (c\omega A)^2} = kA\sqrt{1+(2\zeta\lambda)^2} \quad (8\text{-}2)$$

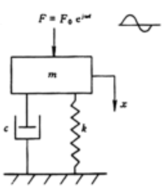


图8-2 积极隔振示意图

又由于单自由度系统有阻尼受迫振动的位移输出的振幅为

$$A = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}} \quad (8\text{-}3)$$

δ(x)

得

所以有

$$F_{\max} = \cancel{\cdots} = F_0\sqrt{\frac{1+(2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}}$$

故可得到通过隔振装置传递到支承上的力幅F_{max}与激振力幅F_0之比为

$$\eta_a = \frac{F_{\max}}{F_0} = \sqrt{\frac{1+(2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}} \quad (8\text{-}4)$$

要<1 → 公式同前

称为积极隔振系数或力传递率，它表示采用隔振器后设备传递给支

$$\eta_a = \frac{F_{\max}}{F_0} = \sqrt{\frac{1+(2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}} \quad \text{略1} \quad (8\text{-}4) \longrightarrow \text{公式同前}$$

称为积极隔振系数或力传递率。它表示采用隔振器后设备传递给支承的最大动载荷（幅值）与未隔振时设备传递给支承的最大动载荷（幅值）的比值。

2）消极隔振

在工程应用中，消极隔振的典型例子是对精密机床本身或对安装在机床上的精密仪表采取的。若将精密机床直接安装在地基上，则地基的振动全部直接传给机床。若在机床和地基之间加上隔振器，则地基的振动将通过隔振器才能传给机床。如果传到机床的振动小于地基的振动，隔振器就起到了隔振作用。

设支承以$x_s = ae^{j\omega t}$的规律振动，则振动体也将受迫产生振动$x = Ae^{j(\omega t-\psi)}$，其振幅为

$$A = a\sqrt{\frac{1+(2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}} \qquad (8\text{-}5)$$

消极隔振的隔振效果用隔振系数η_p来表示，它是指安装隔振器后振动体的振幅与支承振动的振幅之比，即：

$$\eta_p = \frac{A}{a} = \sqrt{\frac{1+(2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}} \qquad (8\text{-}6)$$

因此，消极隔振的隔振系数也称位移传递率。上式与(8-4)式的表达式完全相同，这说明当振源是简谐振动时，积极隔振与消极隔振的隔振系数的数学表达式是相同的。同样，只有η_p小于1才有隔振效果。

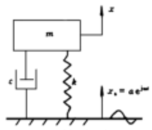
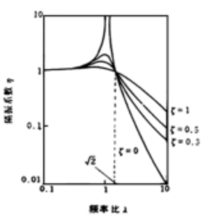


图8-3 消极隔振示意图

2．隔振特性

隔振系统的隔振特性可由隔振系数随系统各参数的变化规律看出。为此，以频率比λ为横坐标，隔振系数η为纵坐标，阻尼比ξ为参变数，将式（8-4）或式（8-6）做成图8-4所示的曲线图。



ξ小 eg.弹簧，减振好，但支撑力不足

ξ大 eg.橡胶

常用隔振器

（1）金属弹簧隔振器

金属弹簧隔振器有螺旋弹簧、钢板弹簧和扭杆弹簧隔振器三两种。螺旋弹簧多用于通用机械及矿山机械，钢板弹簧主要用于交通车辆和工程车辆车体与行使系统的隔振，而扭杆弹簧主要用于轻型客车和货车的悬架系统。

其优点是可选用的刚度范围很大，承载力大，性能稳定。缺点是阻尼小，抑制共振振幅的效果较差，而且在高频激励下易形成驻波，影响隔振效果。

（2）橡胶隔振器

橡胶隔振器由合适硬度的橡胶材料制成，根据受力情况，这类隔振器可分为压缩型、剪切型、压缩-_剪切复合型等。其优点是形状可自由选择，可有效利用有限空间，阻尼比较大，缺点是承载荷量不能过大，稳定性差。

（3）气体弹簧隔振器

气体弹簧按其工作介质的不同，可分为空气弹簧和油气弹簧，对其分别介绍如下：

1）空气弹簧

空气弹簧是在橡胶气囊密封容器中充入压缩气体，利用气体的可压缩性实现其弹性作用的装置。它按结构形式分为囊式空气弹簧和膜式空气弹簧两种，具体结构如图8-5所示。

→密封性
排气

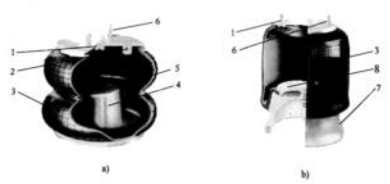


图8-5 空气弹簧结构示意图

(a) 双曲囊式空气弹簧　　(b) 膜式空气弹簧

1—进气孔 2—限位孔 3—橡胶气囊 4—橡胶缓冲块 5—腰箍 6—安装螺栓 7—底座 8—底座凸台

2）油气弹簧

没讲了

（4）复合弹簧

复合弹簧是由金属螺旋弹簧盒复合橡胶复合为一体的弹性体，它集金属弹簧和橡胶弹簧的优点于一体，并克服了两者的缺点，具有机械性能稳定，承受载荷大，变形小，隔振降噪效果好，工作平稳，共振区时间短等优点，尤其适用于矿山、冶金、煤炭等行业的大型振动设备。

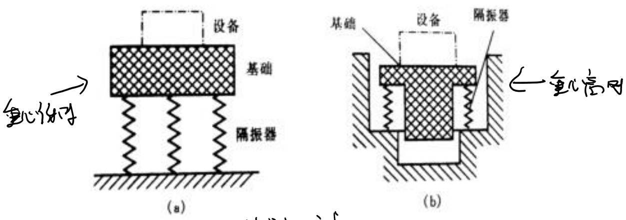
（5）金属橡胶隔振器

金属橡胶材料是一种匀质的弹性多孔材料，使用特定的工艺方法将一定质量的、呈螺旋状态的金属丝经拉伸展开并有序地排放在冲压模具中，然后用冷冲压的方法成型的一种新型功能减振材料。用这种材料制成的隔振器是一种新型隔振器。

金属橡胶具有重量轻、恶劣环境适应性强（耐高低温、耐腐蚀）、阻尼大、弹性高、抗冲击能力强、工作周期长和性能稳定等优点。目前已成功应用于航天、航空领域。

4. 隔振器的布置形式

隔振器的布置形式常采用支承式和悬挂式两种。
对于支承式的布置形式，都采用受压弹簧，且当振动设备重心较低时，一般采用图8-7(a)所示的支承式的布置；当振动设备重心较高时，常采用图8-7(b)所示的支承式的布置。



支承式布置形式

对于悬挂式的布置形式，视隔振器的受力情况，可采用8-8(a)所示的承拉式布置形式或8-8(b)所示的承压布置形式两种形式。

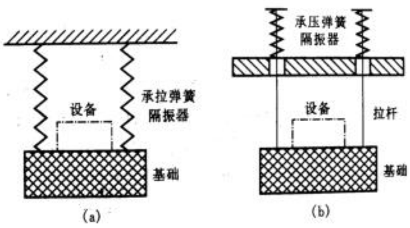


图8-8 悬挂式布置形式

5. 隔振器的设计

隔振系统一般按下述步骤设计：　不要基础

（1）振源识别。测试分析振源激励力的大小、方向及频率；振源的频率通常与机器的转速存在一定关系。　知道即可

（2）选择隔振后的机械系统的自然频率ω_n，使系统的自然频率与振源频率ω有下列关系$\omega/\omega_n=2.5\sim5$。若振源是一系统谐波的组合，则一般应使最低的频率满足上式。但对于不太显著的谐波，也可不受此限制，即只要使振源中主要激振力的频率满足上式。

（3）按隔振机器设备及其基础的有关资料计算其总质量m。根据上一步中确定的ω_n可计算隔振装置的刚度$k=\omega_n^2m$。

（4）在隔振初步设计中往往不考虑阻尼率，按上一步确定的刚度k作为依据即可选择隔振装置，这样得到的隔振系统就具有隔振作用，即$\eta_a<1$，将$\xi=0$及k、m（或$\omega/\omega n$）代入（8-4）式，即可算出隔振传递率ηa的大小。

（5）验算机器或仪器设备工作时的振动振幅，因为许多机器设备或仪器设备工作时的振动振幅是有限制的。对主动隔振系统而言，其主要目的是减小机器的动力激励传向地基，为此必须付出增加机器自身振动的代价，因此有必要校核机器在实施隔振后的振幅，使其不致超出许可范围；对被动隔振系统而言，即使隔振系统的作用就是减小机器的振动，也有必要验算机器隔振后的振幅，确认其在许可范围内。

例1．某精密设备用橡胶隔振器隔振，如图8-9所示，已知系统的自然频率为3.7Hz，橡胶隔振器的阻尼率为$\xi=0.125$，如地基的垂直扰动为正弦振动，振幅$|Y|$为$2\times10^{-5}m$，最大振动速度$|\dot{Y}|$为$1.256\times10^{-4}m/s$求设备振幅。

→例1重要
例2课上跳过了
TODO 重做一下

解：地面扰动的频率为　$w=\frac{1}{T}\ s^{-1}$　$\frac{m/s}{m}\ s^{-1}$

激振频率

$$\omega=|\dot{Y}|/|Y|=\frac{1.256\times10^{-4}}{2\times10^{-5}}=6.28(rad/s)$$

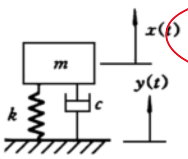


图8-9

系统的自然频率为　固有频率

$$\omega_n=2\pi f=2\pi\times3.8=23.9(rad/s)$$

隔振系统的振动传递为

$$T_A=\sqrt{\frac{1+(2\xi\omega/\omega_n)^2}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+(2\xi\omega/\omega_n)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+(2\times0.125\times6.28/23.9)^2}{\left[1-(6.28/23.9)^2\right]^2+(2\times0.125\times6.28/23.9)^2}}=0.2$$

因此设备的振幅 $|X|$ 为

$$|X|=|Y|T_A=2\times10^{-5}\times0.2=4\times10^{-6}\,(m)$$

例2、略过了

二、切断振动的传输途径

在振动波传播的路径上挖沟，以阻隔振动的传播，是一种行之有效的办法。这种为隔振而开设的沟，称为防振沟。图8-10为其应用示意图。

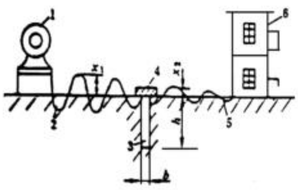


图8-10 防振沟应用示意图
1—振源；2—沟前波；3—防振沟；4—盖板；5—沟后波；6—住宅

一般而言，沟的深度越大，隔振效果越显著，而沟的宽度则影响不大沟中不填充任何物料时，隔振效果最佳。必要时，也可填以松散锯末之类，以防物品误入沟内。

图8-11为根据试验结果做出的隔振效果图，横坐标为防振沟深度h与振动波波长λ之比；纵坐标为沟后波振幅x2与沟前波振幅x1之比。它反映了防振沟的隔振效果。沟的宽度通常取为振动波波长的1/20。

图中，波长λ是指沿地面传播时的波长，且有

$$\lambda=\frac{c}{f}$$

c——波的传播速度（m/s），见表8-1；

f——波的频率（Hz）。

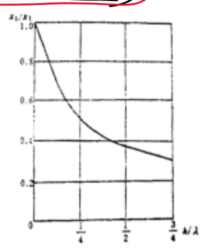


图8-11防振沟的隔振效果图

根据振动波的性质（c、f）及隔振要求（x_2/x_1），由图8-11即可确定防振沟的尺寸。不同振动频率的地表波的波速与波长的关系如表8-1所示。

表会给

表 8-1 不同振动频率的地表波的波速与波长

振动频率（Hz）	地表波速（m/s）	波长（cm）
10	140	1400
200	136	67.6
250	127	51.2
300	126	42.1
350	116	33.5

例3．如果要使频率为10 Hz的振动的振幅减为原来的一半，试确定防振沟的尺寸。

$\lambda=cT$

解：由表8-1可查得10 Hz振动的波速为140 m/s，则波长为 $\lambda=\frac{c}{f}=\frac{140}{10}=14\text{m}$

由图8-11知，当 $x_2/x_1=1/2$，$h/\lambda=1/4$，所以

9:00

掌握内容

①隔振系统传递系数和加速度及振幅 ☆很重要，考过振动也要求

②防振沟怎么挖 ☆重要

解：由表8-1可查得10 Hz振动的波速为140 m/s，则波长为 $\lambda = \frac{\quad}{f} = \frac{\quad}{10} = 14\text{m}$

① 隔振……

由图8-11知，当 $x_2/x_1 = 1/2$，$h/\lambda = 1/4$，所以

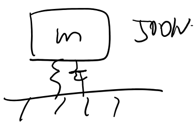
② 防振沟怎么挖 ✓ 重要

→ 具体课后　　弹簧什么写一下吗

防振沟深度为 $h = \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4} \times 14 = 3.5$ （m）　h查表记

防振沟宽度为 $b = \frac{1}{20}\lambda = \frac{1}{20} \times 14 = 0.7$ (m)　$b = \frac{1}{20}\lambda$ 固定公式

练习：发动机重5000N，将其安装在基台上，当它的转速到达3000r/min正常工作时，为消除对周围环境产生振动影响，请确定在基础上的吸振器的参数，其中辅助质量最大位移量为1mm,激振力的幅值为300N。→ 找最



固有频率 $\omega_n = \frac{3000 \times 2\pi}{60} = 100\pi$

$x = 1\text{mm}$　$F = 300\text{N}$

$F' = \eta F$

$\eta = \sqrt{\frac{(2\xi\lambda)^2 + 1}{(2\xi\lambda)^2 + (1-\lambda^2)^2}}$

$\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$

$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

解：w=n*2*pi/60=314.16rad/s

TODO 重做

要使得基础的运动为0，则辅助质量的位移要与激振力的大小形同，方向相反。频率相同。则

$\boxed{F = m_2 * w^2 * A}$ → $w^2 A \sin(\cdots)$

$300\text{N} = m_2 * 314.16^2 * 0.001$

弹簧的刚度则为 $k_2 = m_2 * w^2 = 300\text{k N/m}$

8.1.1 降低干扰力幅值F

如对旋转组件的机械进行动平衡处理，

8.1.2 改变干扰力的频率与系统固有频率之比

使旋转机械的工作转数调开共振区，使系统处于非共振的振动区，以达到减小振幅的目的；

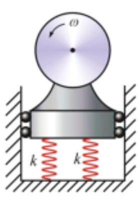
一般情况下，机器转速的设计不可能随意变动，因此往往是通过改变结构的固有频率来降低振动幅值的。

改变结构固有频率可通过改变刚度k或改变质量m来实现。

eg.

已知 电机转速$\omega = 60\pi$ rad/s，全机质量$m = 100$kg，欲使传到地上的干扰力降为原干扰力的 $\frac{1}{10}$

求 隔振弹簧刚度系数k。



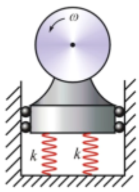
解　按照主动隔振公式，力的传递率为

$$\eta = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \quad 即 \quad \frac{1}{10} = \frac{1}{\frac{\omega^2 m}{k} - 1}$$

可解出隔振弹簧总刚度为

已知 电机转速$\omega = 60\pi$ rad/s，全机质量$m = 100$kg，欲使传到地上的干扰力降为原干扰力的$\frac{1}{10}$

求 隔振弹簧刚度系数k。



解 按照主动隔振公式，力的传递率为

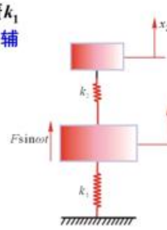
$$\eta = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \quad 即 \quad \frac{1}{10} = \frac{1}{\frac{\omega^2 m}{k} - 1}$$

可解出隔振弹簧总刚度为

$$k = \frac{\omega^2 m}{11} = 323 \text{ kN/m}$$

8.2 减振器

图为**无阻尼动力减振器**的系统。其中由质量m_1和弹簧k_1组成的系统，称**为主系统**；由质量m_2和弹簧k_2组成的**辅助系统**，**称为减振器**。



→减振器

→主系统

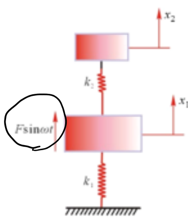
这是两自由度的无阻尼受迫振动系统。现建立该系统的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}\sin\omega t$$

代入

设稳态响应为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\sin\omega t$

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$



设式中的系数行列式不为零，即

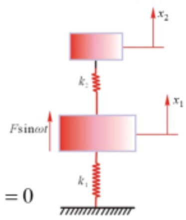
$$\nabla(\omega^2) = (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2 \neq 0$$

因此，可得受迫振动的振幅

$$B_1 = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2)F}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

$$B_2 = \frac{k_2 F}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

令 $p_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad p_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$



$$B_1 = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2)F}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2} \xRightarrow{\omega = p_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}} B_1 = 0$$

非常重要

使p_{22}与系统的工作频率(激振力的频率)相等，则x_1的振动将被消除，这种现象称为反共振。

结构设计

吸振器固有频率＝激振频率

$$B_2 = \frac{k_2 F}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2} \xRightarrow{\omega = p_{22}} B_2(\omega) = -\frac{F}{k_2}$$

适用频率窄

第一种推导：

$$\omega = p_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad B_1 = 0 \quad B_2(\omega) = -\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \frac{B_0}{\mu} = -\frac{F}{k_2}$$

减振器的质量m_2的运动为 $x_2(t) = -\frac{F}{k_2}\sin\omega t$

减振器经过弹簧k_2对m_1的作用力为

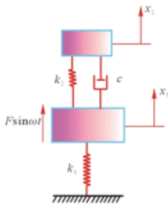
$$k_2 x_2 = -F\sin\omega t$$

这个力恰与作用在主质量m_1上的激振力$F\sin\omega t$大小相等、方向相反，互相平衡。

这就是减振器消除主系统振动的原理。

这种减振器的缺点是使单自由度系统成为两自由度系统，因而有两个固有频率。如果激振力的频率变化，就可能出现两次共振。解决这些问题的途径是（1）采用阻尼动力减振器；（2）增加控制系统，使原来的被动减振器变为有源的主动减振器。

图中由质量m_1和弹簧k_1组成的系统是**主系统**。为了在相当宽的工作速度范围内，使主系统的振动能够减小到要求的强度，设计了由质量m_2、弹簧k_2和粘性阻尼器c组成的系统，称之为**有阻尼减振器**。显然，主系统和减振器组成了一个新的两自由度系统。
建立其运动微分方程为



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}\sin\omega t$$

一推公式，张老师会快

∴竖直方向投影再乘 $\sin\omega t$
偏心力 $m\omega^2 e$

例 题

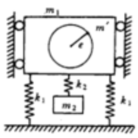
如图所示，已知机器质量m_1=90kg，减振器质量m_2=2.25kg，若机器上有一偏心质量m'=0.5kg，偏心矩e=1cm，机器转速n = 1800 r/min。试求：(1) 稳态振幅

(2) 减振器的弹簧刚度k_2多大，才能使机器振幅为零?

(3) 此时减振器的振幅B_2为多大?

(4) 若使减振器的振幅B_2不超过2mm，应如何改变减振器的参数?

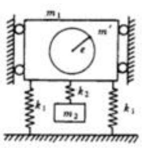
也要会把参数求出来
一定要会



解： 建立广义坐标由图示。
得作用力方程为

$$\cancel{\begin{bmatrix} m_1+m' & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} 2k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m'e\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}\sin\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} m_1+m' & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} 2k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m'e\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}\sin\omega t$$



设 $x_1 = B_1\sin\omega t, x_2 = B_2\sin\omega t$ 代入上式得

$$B_1 = \frac{(k_2-m_2\omega^2)m'e\omega^2}{[(2k_1+k_2)-(m_1+m')\omega^2-k_2^2]}$$

∴除一未画

$$B_2 = \frac{k_2 m'e\omega^2}{(k_2-m_2\omega^2)[(2k_1+k_2)-(m_1+m')\omega^2]-k_2^2}$$

由已知条件知：作用在机器上的激振力

$$F = m'e\omega^2\cdot\sin\omega t$$

$$\omega = \frac{n\pi}{30} = 188.4\ \ (1/\text{s})$$

（2）若满足 $\dfrac{k_2}{m_2} = \omega^2$

则机器振幅为零

$$k_2 = \omega^2\cdot m_2 = 7.99\times10^4\ \ \text{N/m}$$

（3）此时： $|B_2| = \dfrac{F_0}{k_2}$

$$F_0 = m'e\omega^2 \qquad k_2 = \omega^2\cdot m_2$$

$$B_2 = \frac{m'e\omega^2}{m_2\omega^2} = \frac{m'e}{m_2} = 2.22\ \ \text{mm}$$

（4）令B_2=2 (mm)

$$\begin{cases} B_2' = \dfrac{F}{k_2'} = \dfrac{m'e}{m_2'} = 2 \\ \omega^2 = \dfrac{k_2'}{m_2'} \end{cases}$$ 同时满足

$$k_2 \geq 8.88\times10^4\ \ \text{N/m}$$

$$m_2 \geq 2.5\ \ \text{kg}$$

机械振动公式记忆

2023年2月16日 23:11

势能 → 弹簧

动能 → 质量

耗能 → 阻尼器

无阻尼自由振动

$m\ddot{x}+kx=0$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 固有圆频率

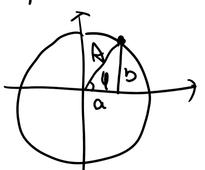
$T=\frac{2\pi}{\omega_n}$ $f_n=\frac{1}{T}$

只与物理性质

通解：$x=A\sin(\omega_n t+\varphi)$

$\dot{x}=A\omega_n\cos(\omega_n t+\varphi)$

$\ddot{x}=-A\omega_n\sin(\omega_n t+\varphi)$



$z=a+bj$

$=A\cos\varphi+jA\sin\varphi$

$=Ae^{j\varphi}$

$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$ $\varphi=\arctan\frac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}}$ ← 与物理性质，初始条件有关

$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$ → $\omega_n^2=\frac{k}{m}$

$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega_n^2A^2\cos^2(\omega_n t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_n t+\varphi)$

$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_n t+\varphi)$

$E_k=E_p=\frac{1}{2}E$ $\because E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2E}{k}}$

单自由度系统有阻尼运动

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 阻尼比 $\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}=\frac{c}{c_c}$ $(c_c=2\sqrt{km})$

(令 $x=e^{\lambda t}$ $m\lambda^2e^{\lambda t}+c\lambda e^{\lambda t}+ke^{\lambda t}=0$)

特征方程 $\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0$

$\therefore\lambda=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ → $-\xi\omega_n t\pm j\omega_d t$

$x(t)=e^{-\xi\omega_n t\pm \underbrace{\omega_n t j\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_d}}$

$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}(c_1\sin\omega_d t+c_2\cos\omega_d t)$

$=e^{-\xi\omega_n t}A\sin(\omega_d t+\varphi)$

$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}$ $\varphi=\arctan\frac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}$

阻尼固有频率 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $\omega_n=\omega_0$ $T_n=T_0$

阻尼自由振动周期 $T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{T_n}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$T_d>T_n$ $\omega_d<\omega_n$

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$

$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{c}{m}=2\xi\omega_n$

$\xi=\frac{c}{m2\omega_n}=\frac{c}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{c}{2\sqrt{km}}$

$c_c=2\sqrt{km}$

当 $c>c_c$ 时 $\xi>1$ 过阻尼

对数衰减率

$\delta=\ln\eta=\ln\frac{A_i}{A_{i+1}}=\ln e^{\xi\omega_n T_d}=\xi\omega_n T_d=\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ (ξ 小时 $\approx 2\pi\xi$)

单自由度有阻尼受迫振动

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P_0\sin\omega t$

$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\omega_n^2B_0\sin\omega t$

静变位：$B_0=\frac{P_0}{k}$ 频率比：$\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}$ (ω → 外界激励，ω_n → 固有频率)

$x=x_1+x_2=Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi)+B\sin(\omega t\boxed{-}\psi)$

初始阶段 / 瞬态响应(短暂) 稳态响应(长时)

$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}$ $\varphi=\arctan\frac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}$

$B=\frac{B_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$ $\psi=\boxed{}\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$

$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

$G(j\omega)=\frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\xi\frac{\omega}{\omega_n}j+1}$ $\lambda=\frac{\omega}{\omega_n}$

$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$

$\varphi(\omega)=\boxed{-}\arctan\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

※注意在 $\omega>\omega_n$ 时 (即 $\lambda>1$)

$-\psi=-\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}-\pi$

$B=\frac{B_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$ $\psi=(-)\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$ $\varphi(\omega)=(-)\arctan\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

注意在 $\omega>\omega_n$ 时 ($\lambda>1$)

$-\psi=-\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}-\pi$

位移干扰

$m\ddot{x}=-k(x-x_s)-c(\dot{x}-\dot{x}_s)$ $x_s=a\sin\omega t$

$\therefore m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{x}_s+kx_s$

$x=B\sin(\omega t-\psi)$

$B=a\sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$ $\psi=\arctan\frac{2\xi\lambda^3}{1-\lambda^2+(2\xi\lambda)^2}$

$=\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}-\arctan 2\xi\lambda$

$G(j\omega)=\frac{1+2\xi\lambda j}{-(\frac{\omega}{\omega_n})^2+2\xi\frac{\omega}{\omega_n}j+1}=\frac{\omega_n^2+2\xi\omega_n s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

$A(\omega)=\sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$

$\varphi(\omega)=\arctan 2\xi\lambda-\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$

$=\arctan\frac{2\xi\lambda-\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}}{1+2\xi\lambda\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}}=\arctan\frac{2\xi\lambda(1-\lambda^2-1)}{1-\lambda^2+(2\xi\lambda)^2}$

$=-\arctan\frac{2\xi\lambda^3}{1-\lambda^2+(2\xi\lambda)^2}$

注：

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha-\beta=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

二自由度

$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=0$

$\{x\}=\{A\}\sin(\omega t+\varphi)$

$\{\ddot{x}\}=-\omega_n^2\{A\}\sin(\omega t+\varphi)$

$(-\omega_n^2[m]+[k])\{A\}=0$

$\therefore|-\omega_n^2[m]+[k]|=0$

求出 ω_{n1} ω_{n2}

$A_1^{(1)}$ $A_2^{(1)}$ $A_1^{(2)}$ $A_2^{(2)}$

ω_{n1} ω_{n2}

$\therefore x_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi)$ ← 2个频率合成1个

$x_2=A_2^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi)+A_2^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi)$

$=\mu A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi)+\mu A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi)$

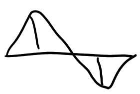
一个物体振动由2个频率的振动合成

$(-\omega_n^2[m]+[k])\{A\}=0$

代 ω_{n1} 代入 得 $\mu_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}$ →

第一阶主振型

代 ω_{n2} 代入 得 $\mu_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}$ →



第二阶主振型

一个频率，2个物体振幅比 即 μ

ω_{n1} 时 $A_1^{(1)}=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_2x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_{n1}}\right)^2}$ 交叉

$\varphi_1=\arctan\frac{(\mu_2x_{10}-x_{20})\omega_{n1}}{\mu_2\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}$

ω_{n2} 时 $A_1^{(2)}=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(\mu_1x_{10}-x_{20})^2+\left(\frac{\mu_1\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}{\omega_{n2}}\right)^2}$

$\varphi_2=\arctan\frac{(\mu_1x_{10}-x_{20})\omega_{n2}}{\mu_1\dot{x}_{10}-\dot{x}_{20}}$

三组曲度

柔度

$X = F(P - M\ddot{X})$　　$F = K^{-1}$　　$f = \frac{x}{F}$

惯性力　　柔度矩阵　　单位力位移

$(-\omega_n^2[M] + [K])\{A\} = 0$

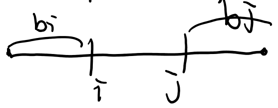
$\omega_n \to$ 固有频率

$\{A\} \to$ 固有振型（只能求出比例）

振型 $\{M\}$

系统固有特性

梁的柔度矩阵



$f_{ij} = \frac{b_i b_j (l^2 - b_i^2 - b_j^2)}{6EI}$

$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$

$[K^{-1}][M]\{\ddot{x}\} + \{x\} = 0$

$\underbrace{(-\omega_n^2[K^{-1}][M] + 1)\{A\}}_{=0} \sin(\omega t + \varphi) = 0$

$\therefore \{A\} = \omega_n^2 [K^{-1}][M]\{A\}$

$\frac{\{M\}}{\omega_n^2} = [K^{-1}][M]\{M\}$

算出，化1，再代入　　代入 M_0

邓克莱公式：

$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = \frac{1}{\omega_{n11}^2} + \frac{1}{\omega_{n22}^2} + \frac{1}{\omega_{n33}^2} \cdots$

系统基频　　只有一个质量时固有频率　　设k

（其他是梁，只有1个质量）

$\underbrace{F_{max}}_{传地力} = \underbrace{F_0}_{幅值} \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$　　积极隔振

F_{max}　　$\sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}$

$\frac{F_{max}}{F_0}$ … $\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}$ 　　　消极隔振

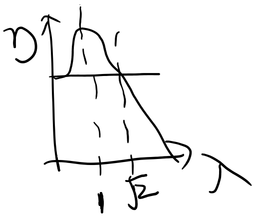
传递率 系数

$$\eta = \frac{F_{max}}{F_0} = \sqrt{\frac{1+(2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}}$$

↓

公式一样 　　　积极隔振

$\eta = \frac{A}{A_0} =$



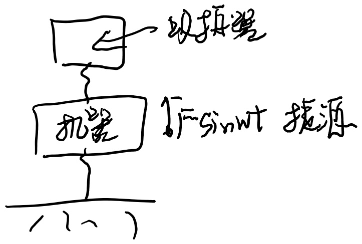
防振沟：

沟宽一般取振动波长的 $\frac{1}{20}$ 　　 $b = \frac{\lambda}{20}$

波长：$\lambda = VT = \frac{V}{f}$

隔振器

动力吸振器：

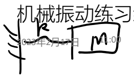


当吸振器固有频率 = 激振频率时

振动完全吸收

机械振动练习纸

2023年2月17日 11:00



(1) $mv_0 = (m+M) V_0$

$\begin{cases} \dot{x}_0 = V_0 = \dfrac{m v_0}{m+M} \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\qquad w = s^{-1}$ $\quad w_n = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$ $\qquad x_0 = A\sin$ $\quad \dot{x}_0 = A w_n \cos$

$\therefore A = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{w_n}\right)^2} = \dfrac{m v_0}{m+M} \times \sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$

$\varphi = \arctan \dfrac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{w_n}} = 0$

$\therefore x = \dfrac{m v_0}{\sqrt{(m+M)k}} \sin\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}\, t$

(2) $E = \frac{1}{2} k A^2$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{8} k A^2$

$\therefore E_k = \frac{3}{8} k A^2 = \frac{3}{8} k \dfrac{m^2 v_0^2}{(m+M)k}$

$W_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{500}{5}} = 10$

$\dfrac{\ln \frac{0.02}{0.012}}{6} = \xi W_n T_d = \dfrac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ $\quad \dfrac{w_d}{2\pi} = f = \dfrac{1}{T}$

$\xi = 0.0134$ $\quad \left(t = \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \xi = \sqrt{\dfrac{t^2}{1+t^2}} \right)$

$\xi = \dfrac{c}{2\sqrt{km}}$ $\quad \therefore c = 2\xi\sqrt{km} = \cancel{27.503}\ 1.35\ \text{Ns/m}$

$mg = k\delta_{st}$

$\therefore k = \dfrac{mg}{\delta_{st}} = \dfrac{150}{0.01} = 15000\ \text{N/m}$

$\delta = \ln\eta = \dfrac{\ln \frac{A_1}{A_{21}}}{20} = \ln e^{\xi W_n T_d} = \xi \dfrac{W_n 2\pi}{W_n\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$\therefore \dfrac{\ln \frac{0.8}{0.16}}{20} = \dfrac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$ $\quad \cancel{0.25615}$ $\quad t = 0.028075$

$\therefore \xi = \cancel{0.24813}$ $\quad 0.0280644\text{9}$

$\xi = \dfrac{c}{2\sqrt{km}} = \quad c = 2\xi\sqrt{km} = 12.260$

$\Delta V = \frac{1}{2} k (A_2^2 - A_3^2)$

$V_1 = \frac{1}{2} k A_1^2$

$\left(\begin{array}{l} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}{w_d}\right)^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{x_0 w_d}{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0} \end{array} \right)$

$A = e^{-\xi w_n t} A$

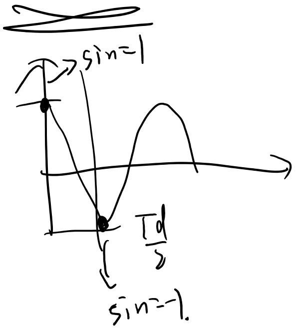
$V_1 = \frac{1}{2} k e^{-2\xi w_n \times 0} A^2$

$\Delta V = \frac{1}{2} k e^{2\xi w_n T_d} A^2$

$\therefore \dfrac{\Delta V}{V_1} = e^{2\xi w_n T_d}$

？？为什么要泰勒展开

泰勒展开 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$



$x = e^{-\xi w_n t} A \sin(w_d t + \varphi)$

$\dfrac{A_1}{A_0} = e^{-\xi w_n \frac{T_d}{2}} = 10\%$

$w_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad w_d = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\sqrt{1-\xi^2}$

$\xi w_n \dfrac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}\cdot 2} = -\ln 0.1$

$\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{-2\ln 0.1}{2\pi}$

$\xi = 0.6$

能量法，等效前后能量

$$\int_0^L \frac{1}{2} m_s \frac{dl}{L}\left(\frac{l}{L}v\right)^2 = \frac{1}{2} m_s' v^2$$

$$\left(\int_0^L l^2 dl\right) \times \frac{1}{2}\frac{m_s}{L}\frac{v^2}{L^2} = \frac{1}{3} l^3 \Big|_0^L \times \frac{1}{2}\frac{m_s v^2}{L^3}$$
$$= \frac{1}{6} m_s v^2$$

$$\therefore m_s' = \frac{1}{3} m_s$$

$$\boxed{J_c = \frac{1}{12} m l^2 + m d^2} = \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} m l^2$$

$$\frac{1}{2} J_c w^2 = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \boxed{\frac{3}{4} L w = v}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{7}{48} m L^2 \times \left(\frac{v}{\frac{3}{4}L}\right)^2 = \frac{1}{2} m' v^2$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{7}{48} \times \frac{16}{9} m v^2 = \frac{1}{2} m' v^2$$

$$m' = \frac{7}{27} m$$

$$m\ddot{x}_0 = P_0 \sin(wt) - 2kx - c\dot{x}$$

$$\therefore m\ddot{x}_0 + c\dot{x} + 2kx = P_0 \sin wT$$

$$\ddot{x}_0 + 2\xi w_n \dot{x} + w_n^2 = w_n^2 B_0 \sin wt$$

$$B_0 = \frac{P_0}{2k} \quad w_n = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{2km}}$$

$B_0 = 0.0025$ $\quad w_n = 10.583$ $\quad \xi = 0.21166$ $\quad w = 2\pi f = 15.708$ $\quad w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = 10.343$ $\quad \underline{\lambda = \frac{w}{w_n} = 1.484}$

※注意在 $w > w_n$ 时要补个 π

即 $-\psi = -\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} - \pi \; [w > w_n]$

$$\therefore x = e^{-\xi w_n t} A\sin(w_d t + \varphi) + B\sin(wt - \psi)$$

$$= e^{-\xi w_n t}\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}{w_d}\right)^2} \sin\left(w_d t + \arctan\frac{x_0 w_d}{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}\right)$$

$$+ \frac{B_0}{\sqrt{(2\xi\lambda)^2 + (1-\lambda^2)^2}} \sin\left(wt - \arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} - \pi\right)$$

$$= e^{-2.24t} \quad - - - -$$

$$x_f = a\sin\frac{2\pi vt}{l} \qquad B = a\sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}$$

$$\xi_1 = \frac{c}{2\sqrt{km_1}} \qquad \xi_2 = \frac{c}{2\sqrt{km_2}} \qquad \therefore \frac{\xi_2}{\xi_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 2$$

$\xi_1 = \frac{c}{2\sqrt{km_1}}$ $\xi_2 = \frac{c}{2\sqrt{km_2}}$ $\therefore \frac{\xi_2}{\xi_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{2}$

1 满 2 空 $\therefore \xi_2 = \frac{1}{2}\xi_1 = 1$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\sqrt{\frac{1+(2\xi_1\lambda_1)^2}{(1-\lambda_1^2)^2+(2\xi\lambda_1)^2}}}{\sqrt{\frac{1+(2\xi_2\lambda_2)^2}{(1-\lambda_2^2)^2+(2\xi\lambda_2)^2}}} = \cdots$$

$$m(s^2X - sx_0 - \dot{x}_0) + c(sX - x_0) + kX = F$$

$$X = \_\_\_\_\_$$

$$ms^2X + kX = F_0\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$X = \frac{F_0 w}{(ms^2+k)(s^2+w^2)} = \frac{F_0 w}{m}\frac{1}{(s^2+\frac{k}{m})(s^2+w^2)}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\cancel{ms^2X + csX + kX = F}$$

$$\cancel{\therefore X = \frac{F}{ms^2+cs+k}}$$

$$m(s^2X - sx_0 - \dot{x}_0) + c(sX - x_0) + kX = F$$

$$X = \frac{F + msx_0 + m\dot{x}_0 + cx_0}{ms^2+cs+k}$$

$$x = e^{-\xi w_n t}A\sin(w_d t + \varphi) + B\sin(wt - \psi)$$

$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}{w_d}\right)^2}$ $\varphi = \arctan\frac{x_0 w_d}{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}$

$B = B_0\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$ $\psi = \arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$

$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $w_d = \sqrt{1-\xi^2}\,w_n$ $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ $\lambda = \frac{w}{w_n}$ $B_0 = \frac{F_0}{k}$

$w_n = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20$ $\xi = \frac{20}{2\sqrt{4000\times10}} = 0.05$ $w_d = 19.974$ $\lambda = 0.5$ $B_0 = 0.025$

$x_0 = 0.01$ $\therefore A = 0.01$ (2) $x_1 = e^{-t}\,0.01\sin(19.975t + 1.520)$

$\frac{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}{w_d} = 0.0005$ $\varphi = 87.137^\circ$
$= 1.520$

$2\xi\lambda = 0.05$ $\therefore B = 0.03325$

$\therefore$ (1) $x_2 = 0.03325\cos(10t - 3.814^\circ)$

$2\xi\lambda = 0.05$ $\qquad = 1.520$

$1-\lambda^2 = 0.75$ $\qquad \therefore B = 0.03325$ $\qquad \therefore (1)\ x_2 = 0.03325\cos(10t - 3.814^\circ)$

$\psi = 3.814^\circ$

$= 0.0665$

$$k_4 + \frac{1}{\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_1+k_2}}$$

二自由度

设 $\theta_1 > \theta_2$

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 = -k_1(\theta_1-\theta_2) \\ J_2\ddot{\theta}_2 = k_1(\theta_1-\theta_2) - k_2(\theta_2) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 + k_1\theta_1 - k_1\theta_2 = 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2 - k_1\theta_1 + (k_1+k_2)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

a

$ma = F$

$= F - ma$

$k_1(x - l_3\theta)$ $\qquad k_2(x + l_4\theta)$

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_3\theta) - k_2(x + l_4\theta) - me\ddot{\theta}$$

$$J_{c_1}\ddot{\theta} = k_1(x - l_3\theta)l_3 - k_2(x + l_4\theta)l_4 - me\ddot{x}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1) - k_3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}\{\ddot{x}\} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\{x\} = 0$$

通解为：$\{x\} = \{A\}\sin(\omega_n t + \varphi)$

$\{\ddot{x}\} = -\omega_n^2\{A\}\sin(\omega_n t + \varphi)$

代入 $(\sin(\omega_n t+\varphi))$

$$(-\omega_n^2[M]+[K])\{A\}=0$$

∴ $|-\omega_n^2[M]+[K]|=0$

由题：$[M]=\begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & 2m\end{bmatrix}$ $[K]=\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & 3k\end{bmatrix}$

∴ $\begin{bmatrix}2k-m\omega_n^2 & -k\\ -k & 3k-2m\omega_n^2\end{bmatrix}=0$ 7 ± 3

$$(2k-m\omega_n^2)(3k-2m\omega_n^2)-k^2=0$$

$$2m^2\omega_n^4+5k^2-7km\omega_n^2=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{7km\pm\sqrt{49k^2m^2-40k^2m^2}}{4m^2}}$$ $\omega_{n1}=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_{n2}=\sqrt{\frac{5k}{2m}}$

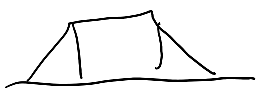
$$=\sqrt{\frac{7\pm3}{4}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_n 代入 $(-\omega_n^2[M]+[K])\{A\}=0$ 时

$$\begin{bmatrix}2k-m\omega_n^2 & -k\\ - & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}=0$$

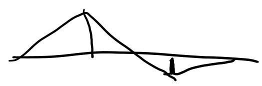
$$(2k-m\omega_n^2)A_1-kA_2=0$$

∴ $\mu_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{2k-m\omega_{n1}^2}{k}=1$ ∴



ω_{n1} 代入 同

$$\mu_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{2k-m\omega_{n2}^2}{k}=-0.5$$



---

① $x_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$ ← 两频率代入

$x_2=A_2^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_2^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$ ← 两频率代入 } 位移

② $=\mu_1A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\mu_2A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

③ $\dot{x}_1=\omega_{n1}A_1^{(1)}\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\omega_{n2}A_1^{(2)}\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2)$ } 速度

$\dot{x}_2=\omega_{n1}A_2^{(1)}\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\omega_{n2}A_2^{(2)}\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

④ $=\omega_{n1}\mu_1A_1^{(1)}\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\omega_{n2}\mu_2A_1^{(2)}\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

取 $t=0$

② $-\mu_1$① $x_{20}-\mu_1x_{10}=(\mu_2-\mu_1)A_1^{(2)}\sin\varphi_2$ ⑤ ω_{n2}

② $-\mu_2$① $x_{20}-\mu_2x_{10}=(\mu_1-\mu_2)A_1^{(1)}\sin\varphi_1$ ⑥ ω_{n1}

⑤ $-\mu_2$ ① $\quad x_{20}-\mu_2 x_{10}=(\mu_1-\mu_2)A_1^{(1)}\sin\varphi_1$ ⑥

④ $-\mu_1$ ③ $\quad \dot{x}_{20}-\mu_1\dot{x}_{10}=\omega_{n2}(\mu_2-\mu_1)A_1^{(2)}\cos\varphi_2$ ⑦

④ $-\mu_2$ ③ $\quad \dot{x}_{20}-\mu_2\dot{x}_{10}=\omega_{n1}(\mu_1-\mu_2)A_1^{(1)}\cos\varphi_1$ ⑧

ω_{n1}

⑥^2 + $\left(\frac{⑧}{\omega_{n1}}\right)^2$:

$$A_1^{(1)}=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\sqrt{(x_{20}-\mu_2x_{10})^2+\left(\frac{\dot{x}_{20}-\mu_2\dot{x}_{10}}{\omega_{n1}}\right)^2}$$

⑤^2 + $\left(\frac{⑦}{\omega_{n2}}\right)^2$

$$A_1^{(2)}=\frac{1}{\cancel{\mu_2-\mu_1}\ \mu_1-\mu_2}\sqrt{(x_{20}-\mu_1x_{10})^2+\left(\frac{\dot{x}_{20}-\mu_1\dot{x}_{10}}{\omega_{n2}}\right)^2}$$

取绝对值

$\frac{⑥}{⑧}$: $\varphi_1=\arctan\frac{(x_{20}-\mu_2x_{10})\omega_{n1}}{\dot{x}_{20}-\mu_2\dot{x}_{10}}$。

$\varphi_2=\arctan\frac{(x_{20}-\mu_1x_{10})\omega_{n2}}{\dot{x}_{20}-\mu_1\dot{x}_{10}}$。

$\omega_{n1}=\sqrt{\frac{k}{m}}\quad \mu_1=1$

$\omega_{n2}=\sqrt{\frac{5k}{2m}}\quad \mu_2=-0.5$

φ

!!! 也附差符号

$\therefore\ \mu_1=1\quad \mu_2=-0.5$

$x_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

$=$

代入 $\mu_1\ \mu_2$

$x_2=\underline{\mu_1}A_1^{(1)}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+\underline{\mu_2}A_1^{(2)}(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

$$[M]=\begin{bmatrix}m_1&&\\&m_2&\\&&m_3\end{bmatrix}\quad [K]=\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2&0\\-k_2&k_2+k_3+k_5+k_6&-k_3\\0&-k_3&k_3+k_4\end{bmatrix}$$

$$[m]\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\\ddot{\theta}\end{Bmatrix}+[k]\begin{Bmatrix}x\\\theta\end{Bmatrix}=0$$

$$[k]=\begin{bmatrix}k_1+k_2&0\\ & \end{bmatrix}\quad [m]=\begin{array}{cc}\ddot{x}=1&\ddot{\theta}=1\\ \begin{bmatrix}m_1+m_2&m_2 l\\ & \end{bmatrix}\end{array}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix} \qquad [M] = \begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix}$$

$$f_{ij} = \frac{b_i b_j (l^2 - b_i^2 - b_j^2)}{6EIl}$$

$$f_{11} = \frac{\frac{l}{4}\frac{3l}{4}\left(l^2 - (\frac{l}{4})^2 - (\frac{3l}{4})^2\right)}{6EIl} = \frac{l^4 \times 3(4^2 - 1^2 - 3^2)}{4^4 \times 6EIl}$$

$$[K^{-1}] = [F] = \begin{bmatrix} 18 & 22 & 14 \\ 22 & 32 & 22 \\ 14 & 22 & 18 \end{bmatrix} \frac{l^3}{1536EI}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \frac{l^3}{768EI}$$

$$[K^{-1}][M]\{\ddot{x}\} + \{x\} = 0$$

$$(-\omega_n^2 [K^{-1}][M] + 1)\{A\} = 0$$

$$\frac{\{u\}}{\omega_n^2} = [K^{-1}][M]\{u\}$$

$$[K^{-1}][M] = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\frac{ml^3}{768EI}}_{q}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} q$$

令 $\{u\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$[K^{-1}][M]\{u_1\} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \end{bmatrix} q \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27 \\ 38 \end{Bmatrix} q = 27q \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.407 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega_n^2}\{u_2\}$$

$[K^{-1}][m]\{\mu_1\} = \begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix} q \begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}27\\38\\27\end{Bmatrix} q = 27q \begin{Bmatrix}1\\1.407\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega_n^2}\{\mu_2\}$

$[K^{-1}][m]\{\mu_2\} = \begin{bmatrix}9&11&7\\11&16&11\\7&11&9\end{bmatrix} q \begin{Bmatrix}1\\1.407\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}31.477\\44.512\\31.477\end{Bmatrix} q = 31.477q \begin{Bmatrix}1\\1.414\\1\end{Bmatrix}$

$\therefore \{\mu\} = \begin{Bmatrix}1\\1.414\\1\end{Bmatrix}$ $\quad \omega_n^2 = \sqrt{\frac{1\times768EI}{31.477\, ml^3}} = 4.934\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$

$\frac{1}{(2\pi 30)^2} = \frac{1}{\omega_n^2} + \frac{1}{\frac{k}{15}}$ $\quad \frac{2}{(2\pi 30)^2} - \frac{1}{(2\pi 24)^2} = \frac{1}{\omega_n^2}$

$\frac{1}{(2\pi 24)^2} = \frac{1}{\omega_n^2} + \frac{1}{\frac{k}{30}}$ $\quad \omega_n = 28.4978$

$A = 2\times10^{-5}$ $\quad \therefore \omega = \frac{\omega A}{A} = \frac{(3)}{(1)} = 6.28$

$\omega A = 1.256\times10^{-4}$

$\omega_n = 2\pi f = 23.247$

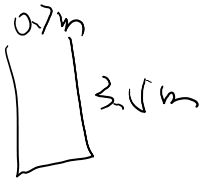
$\therefore \lambda = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.270$ $\quad 0.00446$

$\therefore D = \sqrt{\frac{1+(2\xi\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}} = 1.07$ ← 答案有误

$\therefore$ 一年 $\overset{查表}{\frown}$ $\therefore \xi = \frac{1}{4}$

$f=10 \quad \lambda = \frac{v}{f} = \overset{查表}{\frac{140}{10}} = 14\,m$

$\therefore b = \frac{1}{4}\times\lambda = \frac{1}{4}\times 14 = 3.5\,m$



纵轴线：$b = \frac{\lambda}{20} = 0.7m$

$$W=\frac{3000\times 2\pi}{60}=100\pi$$

吸振器：$W_n=W$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}=W=100\pi$$

$$\boxed{F=ma=mw^2A}=m\times(100\pi)^2\times 0.01=300\rightarrow m=\boxed{}$$

$$\therefore k=100\pi^2 m=100\pi^2\times\frac{300}{(100\pi)^2\times 0.01}=300000\,N/m$$

$$\zeta=0$$

$$\eta=\sqrt{\frac{1+(2\zeta\lambda)^2}{(1-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}}=\frac{1}{10}$$

$$=\left|\frac{1}{1-\lambda^2}\right|=\frac{1}{10}\qquad \lambda=\sqrt{11}$$

$$\lambda=\frac{w}{w_n}=w\sqrt{\frac{m}{k}}\qquad \frac{\lambda}{w}=\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$k=\left(\frac{w}{\lambda}\right)^2 m=323\,kN/m$$

$$F=m'ew^2\sin wt$$

$$W=\frac{2\pi n}{60}=188.495\ rad/s$$

$$\begin{bmatrix} m_1+m' & 0 \\ 0 & m_2\end{bmatrix}\{\ddot{x}\}+\begin{bmatrix} 2k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\{x\}=\begin{Bmatrix} m'ew^2 \\ 0\end{Bmatrix}\sin wt$$

设 $x_1=B_1\sin wt\qquad x_2=B_2\sin wt$

$$\ddot{x}_1=-w^2B_1\sin wt\qquad \ddot{x}_2=-w^2B_2\sin wt$$

$$[m](-w^2)\{B\}+[K]\{B\}=\begin{Bmatrix} m'ew^2 \\ 0\end{Bmatrix}$$

$$([K]-w^2[m])\{B\}=\begin{Bmatrix} m'ew^2 \\ 0\end{Bmatrix}$$

$$(2k_1+k_2\quad w^2(m_1+m'))B_1+(-k_2)B_2=m'ew^2$$

$$(-k_2)B_1 + (k_2 - w^2 m_2)B_2 = 0$$

$$B_2 = \frac{k_2 B_1}{k_2 - w^2 m_2}$$

$$(2k_1 + k_2 - w^2(m_1 + m'))B_1 - \frac{k_2^2 B_1}{k_2 - w^2 m_2} = m' e w^2$$

(1) $$B_1 = \frac{m' e w^2 (k_2 - w^2 m_2)}{(2k_1 + k_2 - w^2(m_1+m'))(k_2 - w^2 m_2) - k_2^2}$$

$$B_2 = \frac{m' e w^2 k_2}{(2k_1 + k_2 - w^2(m_1+m'))\underbrace{(k_2 - w^2 m_2)}_{0} - k_2^2}$$

(2) $\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = w$ 时 为零 即: $k_2 = w^2 m_2 = 80k$

(3) $$B_2 = -\frac{m' e w^2}{k_2} = -\frac{m' e}{m_2} = 2.22\times10^{-3}$$

(4) 令 $B_2 = 2$ mm

$$\begin{cases} B_2 = \dfrac{m' e}{m_2} = 0.002 \\ w^2 = \dfrac{k_2}{m_2} \end{cases}$$

$\therefore k_2 \geq 88k$

$m_2 \geq$ ~~0.25~~ 2.5

$\boxed{\text{改 } m_2\ k_2}$